



La suite spectrale de Leray-Serre en homologie de Floer des varietes symplectiques compactes a bord de type contact

Alexandru Oancea

► To cite this version:

Alexandru Oancea. La suite spectrale de Leray-Serre en homologie de Floer des varietes symplectiques compactes a bord de type contact. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2003. Français. NNT: . tel-00005504

HAL Id: tel-00005504

<https://theses.hal.science/tel-00005504>

Submitted on 1 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THESE

Présentée

Pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

PAR

Alexandru OANCEA

Sujet : La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Floer pour variétés
symplectiques compactes à bord de type contact

Soutenue le 18 septembre 2003 devant la Commission d'examen composée de :

M. François LABOURIE, Examineur

M. Dietmar SALAMON, Examineur

M. Jean-Claude SIKORAV, Rapporteur

M. Claude VITERBO, Directeur

Deuxième rapporteur: M. Paul SEIDEL

Cette thèse est un témoignage de l'amitié et de l'amour que j'ai reçus. Le mot grec pour "témoin" est "*homologē té's*", c'est-à-dire celui qui a la même parole, le même verbe : *homo-logía*. En regardant en arrière il est clair qu'elle n'aurait pu sincèrement parler que de floerilèges homologiques.

Je la dédie à ma femme et à mes parents.

Remerciements

Cette thèse est le fruit d'un travail mené sous la direction de Claude Viterbo. D'une manière ineffable, c'est de lui que j'ai appris que je pouvais mener à bon bout ce que j'avais commencé. Les mathématiques que j'ai rencontrées sont belles et ça a valu le coup. Mais, plus que des mathématiques, c'est surtout un regard nouveau que j'ai découvert. Et cela ne saurait avoir de mesure, de même que ma reconnaissance.

Jean-Claude Sikorav et Paul Seidel ont accepté d'être rapporteurs. Ce n'est pas la plus gratifiante des tâches ; ils l'ont pourtant accomplie en un temps record. Les quelques semaines supplémentaires de rédaction que j'ai pu gagner grâce à cela furent essentielles pour que le dernier chapitre de la thèse reçoive une forme tant peu que soit lisible. François Labourie a accepté avec gentillesse de faire partie de mon jury de thèse. Dietmar Salamon de même, sachant que cela impliquait aussi un voyage depuis Zurich. C'est aussi son soutien pour obtenir une bourse post-doctorale à partir du mois d'octobre 2003 qui m'a permis de finir cette thèse sereinement. Je leur remercie de tout cœur.

Mes remerciements embrassent tous ceux grâce à qui le temps de ma thèse fut un temps de joie et qui, avec bonté et amour, m'ont aidé. Ma famille, mes amis, mes collègues, mes étudiants - ils sont trop nombreux pour que j'essaie de dresser une liste de remerciements individuels. Chacun saura qu'il a une place à part dans mon cœur.

Résumé. Les groupes d'homologie de Floer pour variétés compactes à bord de type contact n'ont pas de correspondant topologique, à la différence des variétés fermées. Le but de cette thèse est d'en donner des propriétés qualitatives lorsque la variété est munie de structures topologiques supplémentaires. Nous avons en vue les fibrations symplectiques (éventuellement triviales). Le premier chapitre de la thèse comprend deux parties : la première compare les différentes constructions de l'homologie de Floer et met en relief le principe spécifique aux variétés à bord, à savoir la nécessité d'obtenir des estimations a priori sur les solutions de l'équation de Floer. On explique comment les groupes d'homologie de Floer sont reliés à la conjecture de Weinstein et on calcule par une méthode nouvelle la cohomologie d'une boule dans un espace vectoriel complexe. La deuxième partie présente une extension de la définition des groupes d'homologie de Floer par des hamiltoniens "asymptotiquement linéaires", extension que nous utiliserons par la suite. Nous travaillons directement dans des variétés non compactes convexes à l'infini, qui sont des complétées symplectiques de variétés compactes à bord de type contact. Le deuxième chapitre démontre la formule de Künneth en homologie de Floer pour un produit de variétés à bord de type contact restreint. Ceci correspond au cas d'une fibration triviale. Le troisième chapitre donne une interprétation de la suite spectrale de Leray-Serre classique en termes exclusifs d'homologie de Morse, qui constitue un modèle simple pour l'homologie de Floer. Le quatrième chapitre étudie l'existence d'une suite spectrale de Leray-Serre pour un certain type de fibrations symplectiques à bord au-dessus d'une base fermée. L'existence de la suite spectrale est établie pour les fibrés en droites hermitiens à courbure négative. Dans le cas général, son existence est ramenée à une estimation d'énergie pour trajectoires de Floer, qui est conjecturée.

Abstract. Unlike Floer homology groups for closed manifolds, the Floer homology groups for compact manifolds with contact type boundary have no topological correspondent. The aim of this thesis is to describe their qualitative properties when the manifold is endowed with supplementary topological structure. More specifically, we consider symplectic fibrations (including trivial ones). The first chapter is divided into two parts: the first one compares the different constructions of Floer homology and underlines its specificity for manifolds with boundary, that is the need to obtain a priori estimates on the solutions of Floer's equation. We explain the relationship between Floer homology groups and Weinstein's conjecture and we compute (using a new method) the Floer homology of a ball in a complex vector space. The second part presents an extension of the definition of Floer homology by using "asymptotically linear" Hamiltonians. This extension will be used later on. We choose the framework of non-compact manifolds which are convex at infinity, that is symplectic completions of compact manifolds with contact type boundary. The second chapter proves the Künneth formula for a product of manifolds with restricted contact type boundary. This corresponds to a trivial symplectic fibration. The third chapter gives a complete description of the classical Leray-Serre spectral sequence in exclusive Morse homological terms, a simple model for Floer homology. The fourth chapter studies the existence of a spectral sequence of Leray-Serre type for a certain kind of symplectic fibrations over a closed symplectic base. The existence of the spectral sequence is proved for hermitian line bundles of negative curvature. In the general case, its existence is reduced to an energy estimate that we conjecture to be true.

TABLE DES MATIÈRES

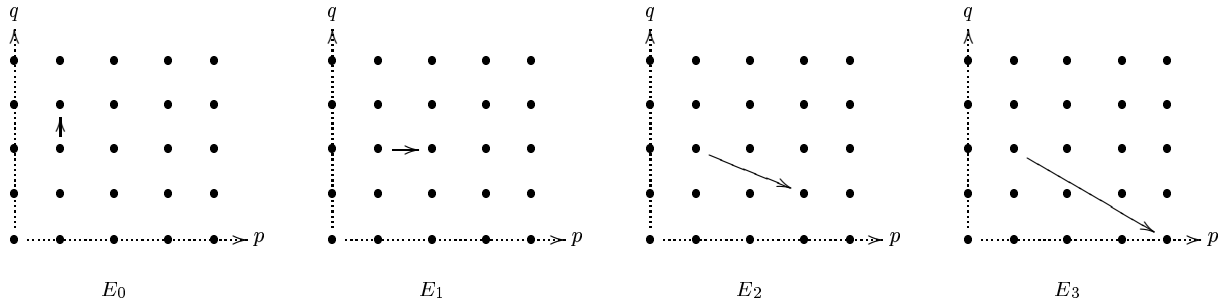
<i>Introduction</i>	3
1. <i>Construction de l'homologie de Floer</i>	15
1.1 Principes généraux	15
1.1.1 Homologie de Morse	15
1.1.2 Homologie de Floer des variétés fermées	16
1.1.3 Homologie de Floer des variétés à bord de type contact	19
1.1.4 Commentaires ; propriétés supplémentaires ; applications	27
1.1.5 Un exemple : la cohomologie de Floer d'une boule dans \mathbb{C}^n	32
1.2 Hamiltoniens asymptotiquement linéaires	36
1.2.1 Contexte	36
1.2.2 Bornes C^0	38
1.2.3 Nouvelle définition de l'homologie de Floer	48
2. <i>La formule de Künneth en (co)homologie de Floer</i>	51
2.1 Contexte et principe de démonstration	51
2.1.1 Hypothèses de travail	51
2.1.2 Énoncé des résultats	52
2.1.3 Principe de la démonstration	54
2.2 Formule de Künneth pour des ouverts RCT bornés dans \mathbb{C}^n	55
2.3 Hamiltoniens asymptotiquement linéaires et produits de variétés	59
2.4 Formule de Künneth pour des variétés RCT	63
2.4.1 Démonstration du théorème principal	63
2.4.2 Applications	71
3. <i>La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse</i>	74
3.1 Introduction	74
3.2 Outils de base	76
3.2.1 Suite spectrale pour un complexe différentiel gradué muni d'une filtration	76
3.2.2 Suite spectrale de Leray-Serre pour une fibration	77
3.2.3 Le complexe de Thom-Smale-Witten (TSW) sur une variété compacte	82
3.3 Fonctions de Morse et fibrations	86
3.3.1 Fonctions de Morse sur l'espace total d'une fibration	87
3.3.2 Métriques adaptées et champs de pseudo-gradient	88
3.3.3 La suite spectrale pour le complexe TSW d'une fibration	89
3.3.4 Systèmes pré-locaux	96
3.3.5 Transversalité	100
3.4 Variétés à bord	104

3.5	Exemples	106
3.5.1	Formule de Künneth	106
3.5.2	Suite exacte de Gysin et classe d'Euler d'un fibré en sphères	107
3.5.3	Fonctions de Morse-Bott et fibrations	108
3.6	Appendice: Indice de Conley et homologie de Morse	110
3.6.1	Indice de Conley	110
3.6.2	Isomorphisme entre homologie de Morse et homologie singulière	112
4.	<i>La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Floer</i>	117
4.1	Contexte, hypothèses, exemples	117
4.1.1	Fibrations symplectiques	118
4.1.2	Analyse des hypothèses techniques	120
4.1.3	Deux points de vue: variétés admissibles vs. variétés complétées	121
4.1.4	Exemples	122
4.1.5	Comportement asymptotique: champ de Reeb, champ de Liouville, coordonnée verticale	125
4.2	Enoncé du théorème principal; stratégie de preuve	128
4.2.1	Enoncé du théorème principal	128
4.2.2	Stratégie de preuve	129
4.3	Formes symplectiques et hamiltoniens normalisés	133
4.3.1	Formes symplectiques	133
4.3.2	Hamiltoniens	136
4.4	Réduction du théorème principal à une estimation d'énergie	140
4.4.1	Equation de Floer modifiée et estimations d'énergie	140
4.4.2	Suites spectrales et passages à la limite	146
4.5	Fibrés en droites négatifs	151
	<i>Bibliographie</i>	154

INTRODUCTION

Cette thèse a comme objet d'étude la suite spectrale de Leray-Serre dans le contexte de la cohomologie de Floer des variétés à bord de type contact. Les deux termes clés sont *suite spectrale* et *homologie de Floer*. Je les explique brièvement ci-dessous, avant de donner le plan de la thèse et la description des quatre chapitres qu'elle comprend.

Brève introduction aux suites spectrales et à l'homologie de Floer. Une *suite spectrale* est un objet algébrique naturellement associé à un complexe différentiel (C, d) muni d'une filtration décroissante $C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_n \supset \dots \supset 0$ qui est préservée par la différentielle i.e. $d(C_p) \subset C_p$. Dans le contexte de cette thèse, les complexes différentiels en question sont gradués $C = \bigoplus_{k \geq k_0} C^k$ et de type cohomologique i.e. $\deg d = +1$, alors que la filtration est compatible avec la graduation au sens où $C_p = \bigoplus_{k \geq k_0} (C_p \cap C^k)$, $p \geq 0$. On note $C_p^k = C_p \cap C^k$ (les variantes homologiques sont aussi valables et s'écrivent formellement en inversant les flèches et en échangeant la position des indices entre le haut et le bas). La suite spectrale est constituée de "pages" $E_r = (E_r^{p,q}, d_r)$, $r \geq 0$ qui sont des complexes différentiels bi-gradués supportés dans le cadran $p \geq 0, q \geq k_0$, avec d_r une différentielle de bi-degré $(r, -r + 1)$ i.e. $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, $d_r^2 = 0$. On convient à poser $E_r^{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < k_0$. Dans les diagrammes ci-dessous (pour lesquels je m'inspire de [Ha]), on peut voir l'action des différentielles d_0, d_1, d_2 et d_3 .



La propriété fondamentale de la suite spectrale est que $E_{r+1} = H(E_r)$, ou encore

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r, q-r+1}}{\operatorname{im} d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \longrightarrow E_r^{p,q}} .$$

Par construction, la suite spectrale associée à un complexe différentiel gradué et filtré vérifie

$$E_0^{p,q} = C_p^{p+q} / C_{p+1}^{p+q} , \quad d_0 = d .$$

On obtient $E_1^{p,q} = H^{p+q}(C_p/C_{p+1})$. Tout comme les images dans C_p/C_{p+1} (de classes) d'éléments de C_p s'annulent dans $E_1^{p,q}$, il faut penser à $E_r^{p,q}$ comme au "bon" quotient où les images dans C_p/C_{p+1} (de classes) d'éléments provenant de C_{p-r+1} s'annulent. De cette manière,

lorsque r devient arbitrairement grand, la suite spectrale prend en compte pratiquement toutes les annulations cohomologiques dans le complexe (C^*, d) initial.

Ce qui précède fait voir qu'il faut lire désormais l'indice p comme le degré de la filtration, la somme $p+q$ comme le degré total et l'indice r comme la "profondeur" (au sens de la filtration) des relations cohomologiques qui sont prises en compte dans E_r .

Dans de nombreuses situations intéressantes - par exemple, lorsque la filtration est finie - les groupes $E_r^{p,q}$ se stabilisent pour r assez grand. La suite spectrale $(E_r)_{r \geq 1}$ converge vers la cohomologie $H(C)$ du complexe initial filtrée comme $H(C) \supset \dots \supset \text{im}(H(C_p) \rightarrow H(C)) \supset \dots \supset 0$, au sens où $E_\infty^{p,q} = H_p^{p+q}/H_{p+1}^{p+q}$, avec $H_p^k = \text{im}(H^k(C_p) \rightarrow H^k(C))$. Si on travaille à coefficients dans un corps, on obtient $H^k(C) \simeq \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q}$: les groupes de cohomologie du complexe initial se lisent sur les diagonales de la page limite.

Le théorème générique concernant les suites spectrales (de type cohomologique) prend la forme suivante (la formulation frappante est empruntée à McCleary [McC]):

Théorème générique. *Il existe une suite spectrale de type cohomologique $(E_r)_{r \geq 2}$ qui converge vers un module gradué H qui est aussi filtré et dont le terme E_2 est connu et a une signification géométrique (ou algébrique) indépendante.*

Alors que le module gradué H a un intérêt indépendant (d'habitude c'est un module de (co)homologie), la filtration n'est pas canoniquement définie. Dans les applications il n'est pas nécessaire de la connaître explicitement, pas plus que la forme explicite des différentielles d_r , $r \geq 2$. C'est la simple existence d'une suite spectrale et l'information sur le terme E_2 qui permettent de déduire des informations non triviales sur la limite H (voir [McC] pour une foule d'exemples qui utilisent la suite spectrale de Leray-Serre classique).

Comme nous l'avons décrit plus haut, une suite spectrale est habituellement construite à partir d'un bi-complexe. Celui-ci n'est généralement pas défini de façon canonique dans le contexte géométrique en question. Par contre, il est remarquable que la suite spectrale toute entière (y compris l'ensemble des différentielles $(d_r)_{r \geq 2}$) ne dépend pas du bi-complexe initial.

Concluons cette brève introduction aux suites spectrales en énonçant le théorème générique dans le cas de la suite spectrale de Leray-Serre [Se], [McC].

Théorème (Suite spectrale de Leray-Serre). *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale. On suppose que B admet une structure de CW-complexe fini. Il existe une suite spectrale de type cohomologique $(E_r)_{r \geq 2}$ qui converge vers $H^*(E)$ et dont le deuxième terme est*

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B; \mathcal{H}^q(F)) .$$

La suite spectrale ne dépend pas de la décomposition en CW-complexe de la base B .

La notation $H^p(B; \mathcal{H}^q(F))$ désigne la cohomologie de la base à valeurs dans un système de coefficients déterminé par la fibration et dont la fibre est $H^q(F)$. Une propriété importante de la suite spectrale de Leray-Serre est la multiplicativité des différentielles d_r , $r \geq 2$ par rapport au cup-produit induit, mais nous ne traitons pas cet aspect dans cette thèse. Remarquons le fait que, pour une fibration triviale $E = B \times F$, les différentielles d_r , $r \geq 2$ sont nulles, $E_2 = E_\infty$ et le théorème précédent se réduit à l'isomorphisme de Künneth si on travaille à coefficients dans un corps.

Le deuxième objet fondamental dont traite cette thèse est la *cohomologie de Floer des variétés symplectiques à bord de type contact*. Dans la littérature elle est aussi désignée sous le

nom de (co)homologie symplectique [FH1, CFH2]. Les références sont assez éparpillées et j'ai considéré nécessaire d'en donner un traitement bref mais unitaire dans le premier chapitre de cette thèse, en insistant sur ses spécificités par rapport à l'homologie de Floer hamiltonienne des variétés symplectiques fermées.

Il suffit de dire ici que le point de départ est la construction par Floer [F3, F4] d'un complexe différentiel (co)homologique $(FC^*(M), d)$ associé à un hamiltonien non dégénéré dépendant du temps $H : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$, où (M, ω) est une variété symplectique fermée. Rappelons qu'une 2-forme ω est dite *symplectique* si elle est fermée et non dégénérée. Les $FC^*(M)$ sont des modules libres engendrés par les orbites 1-périodiques contractiles du hamiltonien H (a priori il pourrait ne pas y avoir de telles orbites, mais a posteriori on retrouve le fait qu'il y en a toujours "suffisamment"). La graduation est donnée par l'opposé de l'indice de Conley-Zehnder des orbites périodiques, qui est bien défini si on impose la condition $\langle c_1(M), \pi_2(M) \rangle = 0$. Cette condition a bien un sens en vue du fait que le groupe de structure du fibré tangent d'une variété symplectique peut toujours être réduit à $U(n)$, grâce à l'existence de structures presque complexes compatibles avec la forme symplectique. Le fait crucial est que les orbites 1-périodiques sont les points critiques de la fonctionnelle d'action, définie sur l'espace des lacets lisses contractiles dans M :

$$A_H(\gamma) = - \int_{D^2} \bar{\gamma}^* \omega - \int_{\mathbb{S}^1} H(t, \gamma(t)) dt ,$$

où $\bar{\gamma}$ désigne une extension de γ au disque D^2 . Pour que l'action soit bien définie on suppose $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$. La différentielle est obtenue en "comptant" les trajectoires de gradient de A_H pour une métrique L^2 adaptée, sur le modèle du complexe de Morse (cf. 3.2.3) d'une fonction définie sur une variété compacte. Même si la fonctionnelle d'action se comporte mal par rapport à la méthode directe du calcul des variations, les espaces de trajectoires de gradient reliant deux points critiques satisfont à une propriété de compacité réminiscente de la condition de Palais-Smale.

Lorsque la variété symplectique n'est pas compacte mais a un bord de type contact (i.e. la forme symplectique est exacte au voisinage du bord avec une primitive "positive") on peut encore construire des groupes d'homologie de Floer [FH1, CFH2, V2]. Ceux-ci prennent en compte les orbites 1-périodiques à l'intérieur de la variété, *ainsi que les caractéristiques fermées de période arbitraire sur le bord*. Les caractéristiques sont les courbes tangentes au noyau (1-dimensionnel) de la forme symplectique restreinte au bord. Elles correspondent aux orbites de hamiltoniens qui admettent le bord comme niveau régulier et doivent être entendues comme des orbites périodiques *situées sur un niveau d'énergie fixé*.

Pour une variété symplectique fermée, l'homologie de Floer ne dépend pas du hamiltonien choisi et coïncide, à un décalage dans le degré près, avec l'homologie singulière. Elle donne une minoration du nombre d'orbites *de période fixée* d'un hamiltonien non autonome par la somme des nombres de Betti de la variété. Dans le cas d'une variété à bord de type contact, il n'y a pas de correspondant topologique pour les groupes d'homologie de Floer. Cela justifie le travail de cette thèse, qui est celui de mettre en évidence des structures algébriques qui reflètent la présence de structures géométriques supplémentaires sur la variété dont on calcule l'homologie de Floer. Nous traitons en particulier le cas d'un produit de variétés à bord de type contact restreint, ainsi que celui d'un certain type de fibrations symplectiques, dont les fibrés en droites à courbure négative.

Pour une variété symplectique (M, ω) à bord de type contact, C. Viterbo a mis en évidence

la flèche naturelle

$$FH^*(M) \xrightarrow{c^*} H^{n+*}(M, \partial M), \quad n = \frac{1}{2} \dim M .$$

La non-bijectivité de celle-ci entraîne l'existence d'au moins une caractéristique fermée sur le bord. Sous-certaines conditions, elle entraîne même l'existence d'une caractéristique fermée sur toute hypersurface à bord de type contact restreint dans M (cf. 1.1.10). C'est la raison pour laquelle les structures algébriques étudiées dans cette thèse (suite exacte de Künneth, suite spectrale de type Leray-Serre) sont systématiquement mises en relation avec la flèche c^* . Elles sont toutes fonctorielles par rapport à celle-ci.

Plan de la thèse. Le premier chapitre, intitulé *Introduction à l'homologie de Floer*, comprend deux parties. Dans la première partie j'expose brièvement la construction de l'homologie de Floer pour les variétés à bord de type contact, je rappelle la manière de l'appliquer à des problèmes d'existence de caractéristiques fermées selon [V2] et je présente en détail le cas des boules de \mathbb{C}^n . Ce dernier calcul est fait d'une manière différente par rapport à ceux qui apparaissent dans la littérature, en perturbant directement des variétés de Morse-Bott d'orbites périodiques. La deuxième partie est dédiée à une extension de la définition de l'homologie de Floer en utilisant une classe nouvelle de hamiltoniens que j'appelle "asymptotiquement linéaires". Cette approche généralise [FH1] et [V2].

Le deuxième chapitre, intitulé *La formule de Künneth en (co)homologie de Floer*, démontre l'existence d'une suite exacte de type Künneth associée à un produit de variétés à bord de type contact restreint, munie d'un morphisme induit par c^* vers la suite exacte de Künneth en cohomologie singulière relative. Cette suite exacte de Künneth doit être entendue comme une forme de suite spectrale de Leray-Serre en homologie de Floer pour une fibration symplectique triviale.

Le troisième chapitre, intitulé *La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse*, commence par décrire le formalisme des suites spectrales et la construction de l'homologie de Morse (avec une légère extension par rapport à la littérature existante pour ce qui est de l'utilisation de systèmes locaux). Il aboutit à une description de la suite spectrale classique de Leray-Serre en termes exclusifs d'homologie de Morse, avec des applications pour ce qui est de l'interprétation de la suite exacte de Künneth et de la suite exacte longue de Gysin. L'appendice final présente un point de vue alternatif en utilisant la théorie de l'indice de Conley. Ce chapitre constitue un modèle en dimension finie pour les constructions réalisées dans le chapitre suivant.

Le quatrième chapitre, intitulé *La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Floer*, démontre l'existence d'une telle suite spectrale pour les fibrés en droites hermitiens à courbure négative, et aboutit presque à la construction d'une suite spectrale pour une classe générale de fibrations symplectiques. Le "presque" signifie que je n'ai pas encore démontré une certaine estimation d'énergie, que je conjecture. La suite spectrale en question est mise en relation avec la suite spectrale de Leray-Serre par l'intermédiaire du travail réalisé dans le troisième chapitre.

Chapitre 1: Introduction à l'homologie de Floer. Une première partie de ce chapitre est consacrée à une présentation des différentes approches de l'homologie de Floer des variétés à bord de type contact. Il n'y a pas encore de traitement unitaire de cette construction dans la littérature. Les articles de base sont [FH1, CFH2, V2] et le plus récent [BPS]. Je mets en relation les trois constructions présentes dans la littérature et j'insiste sur leur dénominateur commun, à savoir la nécessité d'obtenir des estimations C^0 valables a priori sur les solutions de l'équation de Floer. Un deuxième aspect important est le fait que les passages à la limite

impliqués dans la construction de la (co)homologie sont de type inductif en homologie et de type projectif en cohomologie. Cela fait que les résultats que nous obtenons plus tard sont valables en cohomologie uniquement si on travaille à coefficients dans un corps, pour des raisons d'exactitude du foncteur de limite projective. Enfin, un troisième aspect important que je mets en évidence est le fait que, par le théorème d'invariance de l'homologie de Floer par rapport à une isotopie de formes symplectiques obtenu par C. Viterbo [V2], l'homologie de Floer non tronquée par les valeurs de l'action est en fait un invariant de la variété ouverte qui s'obtient en rajoutant un cône positif au dessus du bord de la variété initiale. La première partie finit sur un calcul d'homologie de Floer des boules de \mathbb{C}^n . Le point de vue adopté est différent de celui qu'on peut trouver dans la littérature: je perturbe directement des sous-variétés d'orbites périodiques qui sont non dégénérées au sens de Morse-Bott. Ce calcul peut servir comme exemple aux techniques de [Bg, BPS, Po] et suit une suggestion de [CFHW2].

La deuxième partie du chapitre vise à étendre la définition de l'homologie de Floer de [V2] à une classe plus large de hamiltoniens. Nous prenons le parti de travailler directement avec des variétés ouvertes. Cela sera particulièrement efficace lors de la démonstration de la formule de Künneth. Les conditions que j'impose sont précisées par la définition suivante.

Définition 1.2.2. *Une variété symplectique (\widehat{M}, ω) est dite admissible si elle satisfait aux conditions suivantes :*

- *il existe un champ de vecteurs η défini en dehors d'un compact, complet en temps positif et vérifiant $L_\eta \omega = \omega$. On l'appelle champ de Liouville.*
- *il existe une hypersurface compacte Σ transverse à η telle que*
 - *$\widehat{M} \setminus \Sigma$ admet au moins deux composantes connexes dont exactement une est relativement compacte, notée M ;*
 - *l'application*

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma \times [1^-, +\infty[&\longrightarrow \widehat{M} \\ (x, S) &\longmapsto \varphi_{\ln S} x \end{aligned}$$

est bien définie et induit un symplectomorphisme entre $(\Sigma \times [1, +\infty[, d(S\lambda))$ et $(\widehat{M} \setminus M, \omega)$. Ici 1^- est un réel positif plus petit que, et suffisamment proche de 1, le flot de η est noté φ et λ désigne la restriction de $\lambda = \iota_\eta \omega$ à Σ .

Des variétés de ce type sont aussi appelées dans la littérature [EG] “convexes à l'infini”. Une hypersurface Σ satisfaisant aux propriétés précédentes sera appelée *hypersurface de trivialisat* pour un voisinage de l'infini dans \widehat{M} . Une variété est admissible si et seulement si elle est symplectomorphe à la complétée $M \cup \partial M \times [1, \infty[$ d'une variété symplectique à bord de type contact. Les structures presque complexes adaptées aux variétés symplectiques du type $(\Sigma \times [1, \infty[, d(S\lambda))$ sont décrites par la définition suivante.

Définition 1.2.1. *Soit (Σ, λ) une variété de contact. On note $\xi = \ker \lambda$ la distribution de contact et on munit $\Sigma \times [1, \infty[$ de la forme symplectique $d(S\lambda)$. On note X_{Reeb} le champ de Reeb sur Σ défini par $\iota(X_{\text{Reeb}})d\lambda = 0$, $\lambda(X_{\text{Reeb}}) = 1$. Une structure presque complexe J sur $(\Sigma \times$*

$[1, +\infty[$, $d(S\lambda)$) est dite standard si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} J_{(x,S)}\left(\frac{\partial}{\partial S}\right) &= \frac{1}{S}X_{\text{Reeb}}(x) , \\ J_{(x,S)}(X_{\text{Reeb}}(x)) &= -S\frac{\partial}{\partial S} , \\ J_{(x,S)}|_{\xi} &= J_0 , \end{aligned}$$

où J_0 est une structure presque complexe compatible avec $d\lambda$ sur ξ i.e. $d\lambda|_{\xi}(\cdot, J_0\cdot)$ est une métrique riemannienne. On appellera métrique conique sur $\Sigma \times [1, +\infty[$ la métrique $d(S\lambda)(\cdot, J\cdot)$ associée à une telle structure presque complexe.

La classe de hamiltoniens que j'introduis est la suivante.

Définition 1.2.3. Soit \widehat{M} une variété admissible et Σ une hypersurface de trivialisatation pour un voisinage de l'infini dans \widehat{M} . Un hamiltonien $H(t, x) : \mathbb{S}^1 \times \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est dit asymptotiquement linéaire s'il existe une fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, en notant $\tilde{H} = H \circ \Psi$ et $F(x, S) = Sf(x)$, on ait

$$\frac{|X_{\tilde{H}}(t, x, S) - X_F(x, S)|}{\sqrt{S}} \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbb{S}^1$ et $x \in \Sigma$, la norme $|\cdot|$ étant considérée par rapport à une métrique conique sur $\Sigma \times [1, +\infty[$.

Le théorème principal que j'obtiens dans ce chapitre est énoncé ci-dessous. Il assure l'existence de bornes C^0 valables a priori sur les solutions de l'équation de Floer à paramètre et assure que les hamiltoniens admissibles peuvent être utilisés pour étendre la définition de l'homologie de Floer.

Théorème 1.2.5. Soient $H(s, t, u)$, $s \in \mathbb{R}$ une famille à un paramètre de hamiltoniens admissibles et $\widehat{J}(s, t, u)$, $s \in \mathbb{R}$ une famille à un paramètre de structures presque complexes standard à l'infini, satisfaisant aux conditions (1.24 - 1.34). Il existe une constante $d = d(H, \widehat{J}) > 0$ telle que toute solution de

$$\begin{aligned} u_s + \widehat{J}(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) &= 0 , \\ -\infty < \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)), \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)) &< +\infty \end{aligned}$$

vérifie

$$\sup_{(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} S \circ u(s, t) \leq d .$$

Chapitre 2: Formule de Künneth en homologie de Floer. Les deux théorèmes que j'obtiens dans ce chapitre sont énoncés ci-dessous. La suite exacte de Künneth en (co)homologie de Floer doit être entendue comme une forme améliorée de suite spectrale de type Leray-Serre pour une fibration triviale.

Théorème 2.1.2. [Formule de Künneth en homologie de Floer] Soient (M, ω) , (N, σ) des variétés symplectiques compactes à bord non vide de type contact restreint. On suppose que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = \langle c_1(M), \pi_2(M) \rangle = 0$, $\langle \sigma, \pi_2(N) \rangle = \langle c_1(N), \pi_2(N) \rangle = 0$. On pose $\dim M = 2m$, $\dim N = 2n$.

a. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M, \omega) \otimes FH_s(N, \sigma) & \longrightarrow & FH_k(M \times N, \omega \oplus \sigma) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(M, \omega), FH_s(N, \sigma)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Cette suite exacte est scindée, mais pas canoniquement.

b. On a le morphisme suivant entre les suites exactes de Künneth, où c_* désigne l'application duale à c^* , définie de l'homologie singulière vers l'homologie de Floer, k, r, s, r', s' sont des entiers et l'homologie est calculée à coefficients entiers.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M) \otimes FH_s(N) & \longrightarrow & FH_k(M \times N) & \longrightarrow & \text{Tor}_{1, k-1}(FH) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow c_* \otimes c_* & & \uparrow c_* & & \uparrow \text{Tor}(c_*) \\ & & \bigoplus_{r+s=k} H_{m+r}(M, \partial M) \otimes H_{n+s}(N, \partial N) & & & & \widetilde{\text{Tor}}_{1, m+n+k-1}(H) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r'+s'=m+n+k} H_{r'}(M, \partial M) \otimes H_{s'}(N, \partial N) & \longrightarrow & H_{m+n+k}(M \times N, \partial(M \times N)) & \longrightarrow & \text{Tor}_{1, m+n+k-1}(H) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nous avons utilisé les notations suivantes ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{1, k-1}(FH) &= \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(M), FH_s(N)) , \\ \text{Tor}_{1, m+n+k-1}(H) &= \bigoplus_{r'+s'=m+n+k-1} \text{Tor}_1(H_{r'}(M, \partial M), H_{s'}(N, \partial N)) , \\ \widetilde{\text{Tor}}_{1, m+n+k-1}(H) &= \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(H_{m+r}(M, \partial M), H_{n+s}(N, \partial N)) . \end{aligned}$$

Les mêmes résultats sont valables à coefficients dans un A -module quelconque, avec A un anneau arbitraire, en remplaçant $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ par Tor_1^A .

Théorème 2.1.3. [Formule de Künneth en cohomologie de Floer à coefficients dans un corps] *Sous les hypothèses du théorème précédent, les affirmations suivantes sont valables :*

a. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a un isomorphisme

$$\bigoplus_{r+s=k} FH^r(M, \omega) \otimes FH^s(N, \sigma) \xrightarrow{\sim} FH^k(M \times N, \omega \oplus \sigma) ,$$

les groupes de cohomologie étant calculés à coefficients dans un corps.

b. On a le diagramme commutatif suivant, où c^* désigne l'application canonique depuis la cohomologie de Floer vers la cohomologie singulière, k, r, s, r', s' sont des entiers et la cohomologie est calculée à coefficients dans un corps.

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{r+s=k} FH^r(M) \otimes FH^s(N) & \xrightarrow{\sim} & FH^k(M \times N) \\
\downarrow c^* \otimes c^* & & \downarrow c^* \\
\bigoplus_{r+s=k} H^{m+r}(M, \partial M) \otimes H^{n+s}(N, \partial N) & & \\
\parallel & & \\
\bigoplus_{r'+s'=m+n+k} H^{r'}(M, \partial M) \otimes H^{s'}(N, \partial N) & \xrightarrow{\sim} & H^{m+n+k}(M \times N, \partial(M \times N))
\end{array}$$

La démonstration des deux théorèmes est basée sur un argument de redressement, où un hamiltonien du type $H + K$, avec H et K asymptotiquement linéaires définis sur M et N respectivement, est rendu asymptotiquement linéaire sur le produit des complétées symplectiques $\widehat{M} \times \widehat{N}$.

Chapitre 3: La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse. La première section du chapitre introduit en détail le formalisme des suites spectrales, la suite de Leray-Serre classique et l'homologie de Morse sur une variété compacte. Par rapport à la littérature, le traitement de l'homologie de Morse est légèrement généralisé pour prendre en compte des systèmes de coefficients non triviaux sur la variété en question. Je choisis de démontrer l'isomorphisme entre homologie de Morse et homologie singulière par l'intermédiaire de l'homologie cellulaire, en utilisant un résultat de F. Laudenbach [L1] qui affirme que, lorsque le comportement d'un champ de type Morse-Smale est contrôlé au voisinage des points critiques, les variétés instables forment une décomposition cellulaire de la variété ambiante.

Le reste du chapitre explique comment interpréter la suite spectrale de Leray-Serre exclusivement en termes de fonctions de Morse et trajectoires de (pseudo)-gradient. Des interprétations alternatives de la suite spectrale de Leray-Serre sont déjà connues, notamment [AB, Fu, Fo]. L'approche que je présente est plus explicite et a en vue la généralisation à l'homologie de Floer. Des travaux dans la même direction ont été réalisés simultanément avec les notres par M. Hutchings [Hu]. Les deux théorèmes que je démontre sont énoncés ci-dessous. J'explique à la fin du chapitre comment récupérer les interprétations de la suite exacte de Künneth [Sch1] et de la suite exacte longue de Gysin [Ft]. L'appendice explique une approche alternative de l'isomorphisme entre l'homologie de Morse et l'homologie singulière en utilisant la théorie de l'indice de Conley et la notion de *filtration par couples indexants* [F4, S2]. Je montre notamment que cet isomorphisme ne dépend pas de la filtration par couples indexants, un fait qui ne semble pas être mentionné dans la littérature.

Théorème 3.3.1. [Suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse pour fibrations sans bord]
Soit (E, B, F, π) une fibration localement triviale lisse compacte sans bord. Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et posons $\tilde{f} = f \circ \pi$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction de Morse $f_\epsilon : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f_\epsilon - \tilde{f}\|_{C^1} \leq \epsilon$ et un champ X_ϵ qui est un pseudo-gradient négatif par rapport à f_ϵ , vérifiant $\{X_\epsilon = 0\} = \text{Crit}(f_\epsilon)$ et

$$\pi(\text{Crit}(f_\epsilon)) = \text{Crit}(f) .$$

De plus : a) Il existe une suite spectrale $(E_r)_{r \geq 2}$ qui converge vers $H_{\text{Morse}}^(E, X_\epsilon)$ et qui vérifie*

$$E_2^{p,q} = H_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)) .$$

La notation $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ désigne un système local de coefficients isomorphe au système local de Leray-Serre, alors que $H_{\text{Morse}}^*(E, X_\epsilon)$ désigne la cohomologie de Morse de E calculée par rapport au champ de pseudo-gradient X_ϵ . Cette suite spectrale, ainsi que le système de coefficients $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$, sont construits exclusivement en termes de cohomologie de Morse.

b) Cette suite spectrale est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre habituelle par un isomorphisme qui dépend uniquement du choix d'orientations pour les variétés instables de X_ϵ .

La preuve de l'énoncé pour variétés à bord en cohomologie *relative* utilise la dualité de Poincaré. C'est la raison pour laquelle nous imposons des hypothèses d'orientabilité sur la fibre et l'espace total.

Théorème 3.4.2. [Suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse pour fibrations à bord] Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale lisse avec B fermée et F compacte avec bord non vide. On suppose que F et E sont orientables. Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et posons $\tilde{f} = f \circ \pi$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction de Morse $f_\epsilon : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f_\epsilon - \tilde{f}\|_{C^1} \leq \epsilon$ et un champ X_ϵ qui est un pseudo-gradient négatif par rapport à f_ϵ et qui pointe vers l'extérieur le long de ∂E , tels que $\{X_\epsilon = 0\} = \text{Crit}(f_\epsilon)$ et

$$\pi(\text{Crit}(f_\epsilon)) = \text{Crit}(f) .$$

De plus : a) Il existe une suite spectrale $(E_r)_{r \geq 2}$ qui converge vers

$$H_{\text{Morse}}^*(E, X_\epsilon) \simeq H^*(E, \partial E)$$

et qui vérifie

$$E_2^{p,q} = H_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)) .$$

La notation $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)$ désigne un système local de coefficients isomorphe au système local de Leray-Serre de fibre $H^q(F, \partial F)$. Cette suite spectrale, ainsi que le système de coefficients $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)$, sont construits exclusivement en termes de cohomologie de Morse.

b) La suite spectrale $(E_r)_{r \geq 2}$ est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie relative par un isomorphisme qui dépend uniquement du choix d'orientations pour les variétés instables de X_ϵ , ainsi que du choix d'orientations sur F et E .

Chapitre 4: La suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Floer. Le quatrième chapitre de cette thèse étudie l'existence d'une suite spectrale de type Leray-Serre en cohomologie de Floer pour un certain type de fibrations symplectiques dont l'espace total est une variété admissible au sens de la définition donnée plus haut. Le cadre que nous avons choisi est celui des espaces fibrés au-dessus de bases compactes et ayant une fibre ouverte admissible, mais il sera tout aussi intéressant d'étudier le cas des bases ouvertes avec fibre ouverte ou fermée. Le choix des hypothèses est motivé par l'existence d'une riche classe d'exemples (les fibrés en droites hermitiens à courbure négative) et par la présence de difficultés représentatives pour l'étude de l'homologie de Floer des espaces fibrés. La classe de variétés avec laquelle je travaille est précisée par la définition suivante.

Définition 4.1.2. Une fibration symplectique forte à base compacte est une variété \hat{E} munie d'une structure de fibration localement triviale lisse de base B , fibre \hat{F} et projection $\pi : \hat{E} \rightarrow B$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1. il existe une 2-forme fermée $\Omega \in \Omega^2(\widehat{E})$, $d\Omega = 0$ admettant une primitive Θ définie hors d'un compact, $d\Theta = \Omega$, avec la propriété que toutes les fibres $(\widehat{F}_z, \Omega|_{\widehat{F}_z}, \Theta|_{\widehat{F}_z})$, $z \in B$ sont des variétés admissibles. On a désigné par \widehat{F}_z la fibre $\pi^{-1}(z)$, $z \in B$;
2. la base B est compacte sans bord, munie d'une forme symplectique β ;
3. il existe une primitive Λ de $\pi^*\beta$ définie hors d'un compact, $d\Lambda = \pi^*\beta$;
4. il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $(\widehat{E}, \pi^*\beta + \epsilon\Omega, \Lambda + \epsilon\Theta)$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ est une variété admissible.

La condition 1. est apparentée à l'existence d'une forme de couplage [LaMc] pour fibrations hamiltoniennes à fibre compacte, alors que les conditions 2. à 4. ont comme principe directeur le fait de demander que l'espace total soit une variété admissible par rapport à une forme symplectique du type $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Il est naturel de considérer des formes symplectiques du type $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$ puisqu'elles sont localement proches d'une forme symplectique "produit" comme celle considérée dans le deuxième chapitre de cette thèse.

Un premier théorème que j'obtiens est le suivant.

Théorème (§4.5) [Suite spectrale de Leray-Serre pour un fibré en droites à courbure négative] *Soit (B, β) une variété symplectique fermée dont la forme symplectique est entière $[\beta] \in H^2(B, \mathbb{Z})$. Soit $\mathcal{L} \rightarrow B$ un fibré en droites complexes tel que $c_1(\mathcal{L}) = -[\beta]$. On pose $\dim B = 2n$.*

a) *L'espace total \mathcal{L} est muni d'une structure de fibration symplectique forte (à base compacte) ;*

b) *Il existe une suite spectrale $(E_r)_{r \geq 2}$ qui converge vers $FH^*(\mathcal{L})$, dont le deuxième terme est $E_2^{p,q} = H^{n+p}(B, \mathcal{FH}^q(\widehat{F}))$.*

Corollaire 4.5.2. [Cohomologie de Floer des fibrés en droites à courbure négative] *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$FH^*(\mathcal{L}) = 0 .$$

Noter le fait que le décalage des indices dans le point b) du théorème provient de la normalisation des indices de Conley-Zehnder et de Morse que nous avons adoptée. Le corollaire a des conséquences immédiates pour ce qui est de l'existence d'orbites périodiques sur des hypersurfaces de type contact restreint dans \mathcal{L} .

Sous des hypothèses techniques (qui sont en particulier vérifiées par les fibrés en droites à courbure négative), j'ai beaucoup avancé dans la démonstration du théorème général que j'énonce ci-dessous. Dans ma ligne de raisonnement il manque un argument: une estimation d'énergie (Conjecture 4.4.3) apparentée au lemme de monotonie de Gromov [G] et au lemme de monotonie hamiltonienne de Cieliebak [Ci].

Théorème 4.2.1 (incomplet) [suite spectrale de type Leray-Serre cohomologique] N.B. : Tous les groupes de cohomologie ci-dessous sont calculés à coefficients dans un corps k fixé.

Soit \widehat{E} une fibration symplectique forte, satisfaisant aux conditions i. à vi. du chapitre 4. On pose $\dim B = 2n$, $\dim F = 2k$. Pour toute fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ il existe une suite spectrale $(E_r^{p,q}(f))_{r \geq 2}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $E_2^{p,q}(f) = H_{\text{Morse}}^{n+p}(B, f; \mathcal{FH}^q(\widehat{F}))$, où $\mathcal{FH}^q(\widehat{F})$ est un système de coefficients sur B de fibre $FH^q(\widehat{F})$;

- $E_r^{p,q}(f) \implies FH^*(\widehat{E}, [\Omega_\epsilon])$, au sens où il existe un k -espace vectoriel filtré L_f isomorphe à $FH^*(\widehat{E}, [\Omega_\epsilon])$ et tel que $E_\infty^{p,q}(f) = \text{gr} L_f$.
- on a un morphisme de systèmes de coefficients $\chi : \mathcal{FH}^*(\widehat{F}) \longrightarrow \mathcal{H}^{k+*}(F, \partial F)$ qui coïncide sur chaque fibre avec le morphisme $c^* : FH^*(\widehat{F}_z) \longrightarrow H^{k+*}(F_z, \partial F_z)$, $z \in B$. Ici $\mathcal{H}^*(F, \partial F)$ désigne le système de coefficients de Leray-Serre cohomologique associé à la fibration à bord (E, B, F, π) (cf. 4.1.6).
- on a un morphisme de suites spectrales $\psi_r : E_r^{p,q}(f) \longrightarrow {}_{LS}E_r^{n+p,k+q}$, $r \geq 2$ vers la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration à bord (E, B, F, π) , dont la limite $\psi_\infty : E_\infty^{p,q}(f) \longrightarrow {}_{LS}E_\infty^{n+p,k+q}$ coïncide avec le morphisme induit par la flèche $c^* : FH^*(\widehat{E}) \longrightarrow H^{n+k+*}(E, \partial E)$. On sous-entend que la flèche c^* préserve les filtrations respectives sur $FH^*(\widehat{E})$ et $H^{n+k+*}(E, \partial E)$. De plus, ψ_2 coïncide avec le morphisme induit par le morphisme de systèmes de coefficients χ .

L'argument que j'ai développé passe par une normalisation de la forme Ω au dessus des points critiques d'une fonction de Morse sur la base. Il utilise le fait que, pour ϵ fixé, les orbites 1-périodiques d'un hamiltonien croissant dans les fibres dont la pente est de l'ordre de $\epsilon^{\alpha+\delta-1}$, $\alpha, \delta > 0$, $\alpha + \delta < 1$ sont contrôlées par les orbites 1-périodiques de la relevée d'une fonction de Morse sur la base. Modulo l'estimation d'énergie que j'ai mentionnée plus haut, un passage à la limite selon $\epsilon \longrightarrow 0$ permet de conclure.

Ouvertures. A la fin de ce travail, je soulève quelques questions qui me semblent intéressantes.

1. Quelles sont les situations générales sous lesquelles on peut démontrer des estimations d'énergie pour des solutions de l'équation de Floer $\bar{\partial}_J u = \nabla_J H$? Pour $H = 0$ les résultats de ce genre sont connus sous le nom de "lemmes de monotonie de Gromov". L'article [Ci] donne un exemple avec $H \neq 0$ dans \mathbb{C}^n , le lemme 2.4.1 en donne un autre basé sur le lemme de monotonie habituel dans un produit de variétés et la conjecture 4.4.3 fournit un cadre plausible et intéressant dans des espaces fibrés.

2. Quelle est la classe la plus large de hamiltoniens à travers lesquels on peut définir les groupes d'homologie de Floer? L'importance de cette question est mise en évidence par tout le présent travail. Chaque extension représentative de la classe des hamiltoniens admissibles fournira des informations sur les groupes d'homologie de Floer pour des espaces nouveaux et pourra simplifier maintes preuves antérieures. Par exemple, le fait de dégager la notion de hamiltonien asymptotiquement linéaire nous a permis de donner un traitement rigoureux de la formule de Künneth et de prouver de façon simple l'existence de la suite spectrale pour des fibrés en droites négatifs.

La situation idéale serait de définir une classe de hamiltoniens admissibles en termes *topologiques* plutôt que dynamiques. Cela annulerait toutes les difficultés liées à la définition de l'homologie de Floer et permettrait de réaliser des constructions purement géométriques. Cela pourrait demander un retour aux origines de la théorie de Floer, à savoir la théorie de l'indice de Conley. Des travaux dans cette direction ont été réalisés pour l'homologie de Floer des instantons sur les 3-variétés par P. Kronheimer et C. Manolescu (2001).

3. Existe-t-il une théorie intéressante des fibrations hamiltoniennes (de groupe structural égal à $\text{Ham}(\widehat{F})$) à fibre non compacte admissible \widehat{F} ? Les travaux de F. Lalonde, D. McDuff, L. Polterovich et P. Seidel montrent l'existence d'une géométrie intéressante et surprenante

lorsque la fibre est compacte. Dans le dernier chapitre de cette thèse nous n'avons même pas eu besoin de supposer que le groupe de structure est égal à $\text{Symp}(\widehat{F})$, mais il est bien possible que des phénomènes nouveaux apparaissent dans ce cadre, notamment de dégénérescence de la suite spectrale, en accord avec la philosophie du “scindement cohomologique” pour fibrations hamiltoniennes à fibre compacte [LaMc].

1. CONSTRUCTION DE L'HOMOLOGIE DE FLOER

Ce chapitre présente le contexte de l'homologie de Floer et ses propriétés fondamentales que nous allons utiliser par la suite, tout en donnant une définition étendue et plus flexible de celle-ci dans le cas des variétés ouvertes convexes à l'infini (que j'appelle admissibles dans la section 1.2.1). Les sections 1.1.1 - 1.1.4 reprennent du matériel classique concernant l'homologie de Morse et Floer, en insistant tout spécialement sur la nécessité d'avoir des bornes C^0 a priori sur les trajectoires de Floer afin de pouvoir la définir pour les variétés à bord. La section 1.1.5 présente le calcul de la cohomologie de Floer d'une boule dans \mathbb{C}^n , avec un calcul explicite du complexe de Floer obtenu en perturbant directement des variétés critiques d'orbites périodiques. Je présente dans la section 1.2 le formalisme des hamiltoniens asymptotiquement linéaires, je démontre l'existence de bornes C^0 a priori et je donne une nouvelle définition de l'homologie de Floer, adaptée aux applications des chapitres suivants.

1.1 Principes généraux

1.1.1 Homologie de Morse

La construction des groupes d'homologie de Floer est une vaste généralisation en dimension infinie du complexe de Thom-Smale-Witten (TSW). Rappelons brièvement la construction de ce dernier (cf. 3.2.3) : étant donnée une variété lisse compacte L , une fonction de Morse $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ et une métrique riemannienne g générique pour une certaine propriété de transversalité, on définit deux complexes, homologique et cohomologique respectivement, en posant

$$\begin{array}{ll}
 (1.1) \quad C_q^{\text{Morse}}(L, -\nabla^g f) = \bigoplus_{\substack{\nabla^g f(x) = 0 \\ \text{ind}_f(x) = q}} \mathbb{Z}\langle x \rangle, & (1.1') \quad C_{\text{Morse}}^q(L, -\nabla^g f) = \bigoplus_{\substack{\nabla^g f(x) = 0 \\ \text{ind}_f(x) = q}} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \\
 (1.2) \quad \partial^{\text{Morse}} : C_q^{\text{Morse}}(L, -\nabla^g f) \rightarrow C_{q-1}^{\text{Morse}}(L, -\nabla^g f), & (1.2') \quad \delta_{\text{Morse}} : C_{\text{Morse}}^q(L, -\nabla^g f) \rightarrow C_{\text{Morse}}^{q+1}(L, -\nabla^g f), \\
 (1.3) \quad \partial^{\text{Morse}}\langle x \rangle = \sum_{\text{ind}_f(y)=q-1} \#(\mathcal{M}(x, y; -\nabla^g f)/\mathbb{R}) \langle y \rangle. & (1.3') \quad \delta_{\text{Morse}}\langle x \rangle = \sum_{\text{ind}_f(y)=q+1} \#(\mathcal{M}(y, x; -\nabla^g f)/\mathbb{R}) \langle y \rangle.
 \end{array}$$

La notation $\mathcal{M}(y, x; -\nabla^g f)$ désigne l'espace des trajectoires de gradient négatif depuis y vers x , naturellement muni d'une action de \mathbb{R} par translation. La condition de transversalité mentionnée plus haut désigne la transversalité de l'intersection des variétés stables et instables de $-\nabla^g f$. Elle assure en particulier le fait que $\mathcal{M}(y, x; -\nabla^g f)$ est une variété lisse de dimension $\text{ind}_f(y) - \text{ind}_f(x)$, où ind_f désigne l'indice de Morse d'un point critique de la fonction f . Pour une différence des indices égale à 1, une description soignée de la convergence des suites de trajectoires assure la finitude du quotient $\mathcal{M}(y, x; -\nabla^g f)/\mathbb{R}$, alors qu'un choix d'orientations des variétés instables permet de compter algébriquement ses éléments et

de donner un sens aux coefficients qui apparaissent dans l'expression de ∂^{Morse} et δ_{Morse} . Les identités cruciales $\partial^2 = 0$ et $\delta_{\text{Morse}}^2 = 0$ sont une conséquence d'un théorème de recollement. Celui-ci constitue, avec l'analyse de la convergence des suites de trajectoires, une description de la compactification des $\mathcal{M}(y, x; -\nabla^g f)/\mathbb{R}$ par "trajectoires brisées". Finalement, l'homologie des complexes ainsi construits calcule l'homologie et respectivement la cohomologie singulière $H_*(C_*^{\text{Morse}}(L, -\nabla^g f)) \simeq H_*(L; \mathbb{Z})$, $H^*(C_{\text{Morse}}^*(L, -\nabla^g f)) \simeq H^*(L; \mathbb{Z})$.

Nous devons mentionner deux extensions du cadre présenté ci-dessus, qui prendront de l'importance par la suite. Premièrement, le champ de gradient négatif peut être remplacé par un champ de *pseudo-gradient* négatif X satisfaisant la même condition de transversalité et coïncidant avec un $-\nabla^g f$ au voisinage des points critiques. Deuxièmement, lorsque la variété L n'est pas compacte, la même démarche fonctionne si f satisfait à la *condition de Palais-Smale*: toute suite (x_n) telle que $f(x_n)$ est bornée et $\nabla^g f(x_n) \rightarrow 0$ contient une sous-suite convergente. La condition de Palais-Smale peut évidemment être formulée pour un champ de pseudo-gradient. Pour des réels $a < b$ les complexes construits sur les points critiques situés dans $f^{-1}[a, b]$ calculent respectivement l'homologie et la cohomologie singulière relative $H_*(C_*^{\text{Morse}}(L, -\nabla^g f; a, b)) \simeq H_*(f^b, f^a; \mathbb{Z})$, $H^*(C_{\text{Morse}}^*(L, -\nabla^g f; a, b)) \simeq H^*(f^b, f^a; \mathbb{Z})$. Pour un réel c nous utilisons la notation $f^c = \{f \leq c\}$.

1.1.2 Homologie de Floer des variétés fermées

Nous décrivons maintenant les grandes lignes de construction de l'homologie de Floer hamiltonienne pour une variété *compacte sans bord*. Une référence concentrée sont les notes de cours de D. Salamon [S3], alors que les détails complets sous l'hypothèse d'asphéricité symplectique $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$ qu'on impose dans ce travail se trouvent disséminés dans plusieurs articles de A. Floer dont [F2, F3]. Cette hypothèse peut être éliminée, mais nous l'avons adoptée pour éviter les difficultés liées à la présence de "bulles" dans la convergence de Gromov des courbes pseudo-holomorphes ou celles liées à la technique du cycle virtuel. Nous supposons aussi $\langle c_1, \pi_2(M) \rangle = 0$. Les motivations de ce choix sont expliquées plus bas en relation avec l'indice de Conley-Zehnder. Nous donnons des détails uniquement pour les affirmations que nous utiliserons de manière directe par la suite et nous renvoyons à des références précises pour le reste.

Soit (M, ω) une variété symplectique compacte qui vérifie $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$. Soit $H : \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien dépendant du temps et X_H le champ hamiltonien défini par $\iota_{X_H} \omega = dH(t, \cdot)$. Soit $J_t \in \text{End}(TM)$, $t \in \mathbb{S}^1$ un lacet de structures presque complexes compatibles avec la forme symplectique i.e. telles que $g_{J_t}(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J_t \cdot)$, $t \in \mathbb{S}^1$ sont des formes bilinéaires symétriques définies positives. On aura alors $J_t X_H(t, \cdot) = \nabla^{g_{J_t}} H(t, \cdot)$.

La construction de l'homologie de Floer suit de près celle de l'homologie TSW avec les analogies suivantes :

Variété $L \longleftrightarrow$ Espace des lacets contractiles dans M , noté \mathcal{L}

Métrique $g \longleftrightarrow$ Métrique L^2 sur $\mathcal{L} : \langle \eta, \xi \rangle = \int_{\mathbb{S}^1} g_{J_t}(\eta(t), \xi(t)) dt,$
 $\eta, \xi \in T_\gamma \mathcal{L} = \gamma^* TM$

Fonction $f \longleftrightarrow$ Fonctionnelle d'action $A_H : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma \longmapsto - \int_{D^2} \bar{\gamma}^* \omega - \int_{\mathbb{S}^1} H(t, \gamma(t)) dt$$

$$df(x) \longleftrightarrow dA_H(\gamma) \cdot \eta = - \int_{\mathbb{S}^1} \omega(\eta(t), \dot{\gamma}(t) - X_H(\gamma(t))) dt$$

Point critique de $f \longleftrightarrow$ Orbite 1 – périodique: $\dot{\gamma}(t) = X_H(t, \gamma(t))$

$$\nabla^g f \longleftrightarrow \nabla^J A_H(\gamma) = J_t \dot{\gamma} - J_t X_H$$

Trajectoire de gradient négatif \longleftrightarrow Application $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L} \equiv u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$
vérifiant

$$(1.4) \quad \frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u(s, t)) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^{g_{J_t}} H(t, u(s, t)) = 0$$

et ayant une énergie bornée

$$(1.5) \quad E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} - X_H(t, u) \right|^2 \right) ds dt < \infty$$

Faisons quelques commentaires avant de poursuivre le dictionnaire. Pour un lacet contractile $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ nous avons noté $\bar{\gamma} : D^2 \longrightarrow M$ une extension telle que $\bar{\gamma}|_{\partial D^2} = \gamma$. L'hypothèse d'asphéricité symplectique entraîne alors la bonne définition de la fonctionnelle d'action i.e. son indépendance par rapport au choix de l'extension $\bar{\gamma}$.

D'un point de vue formel, l'analogue des trajectoires de gradient négatif en dimension finie sont les applications $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ satisfaisant l'équation (1.4). En dimension finie et pour des variétés compactes cela entraîne de façon automatique la convergence aux extrémités vers des points critiques de f . Par contre, en dimension infinie il faut imposer une condition supplémentaire pour assurer la convergence (à vitesse exponentielle) aux extrémités vers des orbites 1-périodiques. Cette condition est précisément donnée par la finitude de l'énergie (1.5) et il s'avère que les deux propriétés sont équivalentes [S3].

L'énergie constitue en fait le principe variationnel dont les solutions de l'équation (1.4) réalisent le minimum absolu. Pour des orbites x, y de période 1 dénotons par $\mathcal{U}(y, x)$ l'espace des fonctions $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ qui vérifient $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = y(t)$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = x(t)$ avec convergence uniforme en t . Tout élément $u \in \mathcal{U}(y, x)$ vérifie alors

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H(t, u) \right|^2 ds dt + A_H(y) - A_H(x) .$$

Cela découle sans problème des identités $-\frac{d}{ds} A_H(u(s, \cdot)) = \int_{\mathbb{S}^1} \omega(u_s, u_t - X_H) dt$ et $|u_s + J u_t - J X_H|^2 = |u_s|^2 + |u_t - X_H|^2 - 2 \int_{\mathbb{S}^1} \omega(u_s, u_t - X_H) dt$. Le minimum $A_H(y) - A_H(x)$ de l'énergie sur $\mathcal{U}(y, x)$ est atteint précisément par les solutions de l'équation (1.4) et on note $\mathcal{M}(y, x)$ l'ensemble de ces trajectoires. Nous appellerons “trajectoire de Floer” un élément de $\mathcal{M}(y, x)$.

Un principe variationnel similaire est disponible en dimension finie pour caractériser les trajectoires de gradient négatif: on définit, pour $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow L$, l'énergie $E_{f, g}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\dot{\gamma}|^2 + |\nabla^g f(\gamma)|^2 ds$. La condition de transversalité discutée au 1.1.1 peut être formulée en termes de surjectivité du linéarisé de l'équation des trajectoires de gradient [S2] :

$$D_\gamma \xi = \nabla_s \xi + \nabla_\xi \nabla f(\gamma), \quad \xi \in \gamma^* T L .$$

Une condition de transversalité similaire doit être vérifiée en dimension infinie pour que les espaces $\mathcal{M}(y, x)$ possèdent une structure de variété de dimension finie. Le linéarisé

$$D_u \xi = \nabla_s \xi + J(u) \nabla_t \xi + \nabla_\xi J(u) u_t - \nabla_\xi \nabla H(t, u), \quad \xi \in u^* TM$$

de l'équation (1.4) doit être Fredholm et surjectif i.e. l'équation (1.4) doit être submersive au dessus de zéro. Le caractère Fredholm équivaut à la non-dégénérescence des orbites 1-périodiques de H , alors que la surjectivité est vérifiée pour un choix générique de H et J . La suite de notre dictionnaire s'écrira:

Points critiques non dégénérés \longleftrightarrow Orbites 1 – périodiques non dégénérées

Indice de Morse $\text{ind}_{\text{Morse}}(x)$ \longleftrightarrow Indice de Conley-Zehnder $i_{CZ}(\gamma)$ d'une
d'un point critique x orbite périodique γ , *pris avec signe négatif*

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}(y, x) = \text{ind}_{\text{Morse}}(y) - \text{ind}_{\text{Morse}}(x) &\longleftrightarrow \dim \mathcal{M}(y, x) = i_{CZ}(x) - i_{CZ}(y) \\ &= -i_{CZ}(y) - (-i_{CZ}(x)) \end{aligned}$$

Mettons en évidence le fait que, à la différence de la dimension finie, l'indice d'inertie de la hessienne de A_H en un point critique est mal défini: elle admet un nombre infini de valeurs propres négatives, aussi bien que positives. Ceci peut être facilement vu sur l'exemple simple suivant. Considérons $H = 0$ sur \mathbb{C} et l'action d'un lacet $\gamma = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z_k e^{ikt}$ sera $\int x dy = \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k |z_k|^2$. Les espaces propres positif et négatif de cette forme quadratique sont évidemment de dimension infinie. D'ailleurs, cela montre de nouveau l'inadaptation de la théorie de Morse classique à ce contexte: elle reviendrait à recoller des disques de dimension infinie le long de sphères de dimension infinie, donc contractiles. Les invariants homotopiques des espaces obtenus seraient nuls à tout moment.

L'indice de Conley-Zehnder est un entier associé à un chemin de matrices symplectiques partant de l'identité et aboutissant à une matrice dont le spectre ne contient pas la valeur propre 1. A toute orbite périodique γ on peut ainsi associer un indice de Conley-Zehnder en regardant le linéarisé du flot hamiltonien dans une trivialisations de TM au dessus d'un disque $\bar{\gamma}$. L'hypothèse d'annulation de la première classe de Chern sur $\pi_2(M)$ assure que deux telles trivialisations sont homotopes le long de γ , d'où l'indépendance de $i_{CZ}(\gamma)$ par rapport au choix de $\bar{\gamma}$. Nous expliquons à la fin de ce paragraphe pourquoi le bon analogue de l'indice de Morse est l'indice de Conley-Zehnder pris avec signe négatif, plutôt que l'indice de Conley-Zehnder tout simplement.

Si les hypothèses de transversalité sont vérifiées, le théorème des fonctions implicites assure que la dimension de $\mathcal{M}(y, x)$ en u est égale à l'indice de D_u . L'identification avec la différence des indices de Conley-Zehnder est une conséquence d'une caractérisation en termes du flot spectral d'une certaine famille d'opérateurs différentiels d'ordre 1 associée à l'équation (1.4) [RS1, RS2, S3].

Le seul ingrédient qui manque pour définir formellement un complexe différentiel homologique / cohomologique à la manière des complexes TSW est une recette pour associer un signe à chaque trajectoire de Floer reliant des orbites dont la différence des indices est égale à 1. Il suffit de dire à ce point qu'il y en a une [FH2, S2].

Définition. Les complexes de Floer homologique $FC_*(M; H, J)$ / cohomologique $FC^*(M; H, J)$ sont formellement définis par les équations (1.1, 1.2, 1.3), (1.1', 1.2', 1.3') respectivement. La graduation est donnée par l'opposé de l'indice de Conley-Zehnder.

La définition dépend des résultats de transversalité et non-dégénérescence mentionnés plus haut. Pour un hamiltonien dont les orbites périodiques sont non dégénérées, ceux-ci sont valables pour un ensemble $\mathcal{J}_{reg}(H)$ générique au sens de Baire de structures presque complexes. Inversement, pour une famille $J = (J_t)$ fixée, les résultats de transversalité sont valables pour un ensemble $\mathcal{H}_{reg}(J)$ générique au sens de Baire dans $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M, \mathbb{R})$. En dimension finie, cela revient à prescrire la métrique et à choisir une fonction de Morse générique: du point de vue de la généricité, les deux objets (métrique et fonction) sont symétriques.

Pour fixer les idées, tous les commentaires qui suivent concerneront les groupes de cohomologie. La distinction homologie - cohomologie ne prendra de l'importance que pour les variétés à bord: la définition comprendra comme ingrédient supplémentaire un passage à la limite qui sera de type inductif ou projectif, selon qu'on choisit un formalisme homologique ou, respectivement, cohomologique.

La propriété fondamentale de la cohomologie de Floer

$$FH^*(M; H, J) = H^*(FC^*(M; H, J))$$

est l'indépendance par rapport au hamiltonien et à la structure presque complexe. Pour deux paires (H^0, J^0) , (H^1, J^1) qui vérifient les conditions de régularité précédentes il existe une homotopie de paires régulières (H^t, J^t) , $t \in [0, 1]$. Toute telle homotopie induit un *isomorphisme* $FH^*(M; H^0, J^0) \xrightarrow{\sim} FH^*(M; H^1, J^1)$ qui, de plus, *ne dépend pas de l'homotopie régulière choisie*. Cela fait qu'on peut identifier la cohomologie de Floer avec un invariant topologique classique, à savoir la cohomologie singulière. Considérons pour cela le cas particulier d'un hamiltonien H qui est indépendant du temps et qui est une fonction de Morse. Tout point critique x de H est aussi une orbite 1-périodique et, en vue de la convention $X_H = -J\nabla H$, on déduit pour la normalisation usuelle de l'indice de Conley-Zehnder $i_{CZ}(x) = n - \text{ind}_{\text{Morse}}(x, -H)$, $n = \frac{1}{2} \dim M$ ou encore $\text{ind}_{\text{Morse}}(x, -H) = n + (-i_{CZ}(x))$. Lorsque H est aussi suffisamment petit en norme C^2 on peut montrer que les trajectoires de Floer (vérifiant l'équation $u_s + Ju_t = \nabla H$) qui relient des points dont la différence des indices est égale à 1 sont en fait indépendantes du temps [F3], ce qui fait que le complexe de Floer coïncide avec le complexe TSW correspondant à ∇H . On retrouve alors, pour la graduation sur FC^* donnée par l'opposé de l'indice de Conley-Zehnder, l'isomorphisme

$$FH^*(M, \omega) \simeq H^{n+*}(M; \mathbb{Z}), \quad n = \frac{1}{2} \dim M .$$

On voit en particulier l'intérêt de choisir comme graduation $-i_{CZ}$ plutôt que i_{CZ} . Dans ce dernier cas on aurait obtenu l'isomorphisme $FH^* \simeq H^{n+*}$ à travers la dualité de Poincaré superflue $H_{n-*}(M) \simeq H^{n+*}(M)$.

1.1.3 Homologie de Floer des variétés à bord de type contact

Le deuxième grand cadre de définition des groupes d'homologie de Floer hamiltonienne est celui des variétés symplectiques *compactes avec bord de type contact*. Les références principales pour ce point de vue sont les articles de K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki [FH1,

CFH2, CFHW2] et C. Viterbo [V2]. La thèse de D. Hermann [He1] m'a aussi beaucoup aidé par la clarté du point de vue adopté, ainsi que l'article de P. Biran, L. Polterovich et D. Salamon [BPS]. La conjecture de Weinstein et des problèmes connexes sont discutés dans le livre de H. Hofer et E. Zehnder [HZ].

Le motivation initiale pour construire l'homologie de Floer était le problème de l'existence d'orbites périodiques pour des champs hamiltoniens. Celui-ci comprend, en gros, deux volets : recherche et estimation du nombre d'orbites de *période donnée* et recherche d'orbites de période arbitraire *sur un niveau d'énergie donné*. Historiquement, ces deux directions de développement correspondent à une conjecture de V.I. Arnold (1965) et à une conjecture de A. Weinstein (1979). La première prédit, pour le nombre d'orbites de période fixée sur une variété compacte sans bord, une borne inférieure égale au rang total de la cohomologie (rationnelle) de la variété. Sous les hypothèses précédentes, elle découle des propriétés des groupes d'homologie de Floer. Notons que des preuves en toute généralité sont disponibles depuis 1996. La deuxième conjecture prédit l'existence d'une orbite périodique sur un niveau Σ compact de type contact et l'homologie de Floer pour variétés à bord est un outil adapté à cette étude.

Définition 1.1.1. *Une hypersurface (compacte) Σ dans une variété symplectique (M, ω) est dite de type contact s'il existe un champ de vecteurs X défini au voisinage de Σ tel que X soit transverse à Σ et $L_X\omega = \omega$. Le champ de vecteurs X sera appelé champ de Liouville. La 1-forme $\lambda = \iota_X\omega$ est appelée forme de Liouville. Si le champ de Liouville peut être défini sur tout M on dit que Σ est de type contact restreint.*

Le bord d'une variété symplectique M est dit de type contact (restreint) si les précédentes conditions sont vérifiées et le champ de Liouville pointe vers l'extérieur de M .

La condition de type contact est un analogue symplectique de la convexité dans \mathbb{R}^{2n} : toute hypersurface compacte convexe est de type contact, vu que le champ radial $X(x) = \frac{1}{2}x$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifie les conditions précédentes (si 0 est dans la composante bornée du complémentaire de Σ). La conjecture a été formulée précisément en vue de résultats préliminaires d'existence d'orbites périodiques sur des niveaux convexes ou étoilés. Une première démonstration pour $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ a été donnée par C. Viterbo [V1] et de nombreux autres cas d'espaces ambiants ont été explorés par la suite.

La condition de type contact est aussi en relation avec la pseudo-convexité holomorphe, comme il a été remarqué par Y. Eliashberg, M. Gromov [EG] et D. McDuff [McD]. C'est précisément la raison pour laquelle nous imposons que le champ de Liouville pointe vers l'extérieur du bord (ceci est vrai de façon automatique si la variété est compacte à bord de type contact restreint puisque le champ de Liouville dilate - exponentiellement - les volumes). Nous donnons des explications détaillées sur la pseudo-convexité un peu plus loin.

Les groupes d'homologie de Floer pour des variétés à bord de type contact seront définis à l'aide de hamiltoniens ayant le bord comme niveau régulier. Les invariants obtenus prendront en compte non seulement les orbites 1-périodiques à l'intérieur de la variété, mais aussi les orbites de période arbitraire sur le bord. En conséquence, ils seront bien adaptés au problème de Weinstein. Notons d'emblée que, à la différence du cas compact où l'homologie de Floer est en fin de compte égale à l'homologie singulière, il n'y a pas d'analogue topologique similaire pour le cas à bord. Cela justifie les résultats de cette thèse, qui visent à mettre en évidence des structures algébriques déterminées par la présence de structures géométriques spéciales.

Voici comment on récupère sur un niveau Σ de type contact des orbites de période arbitraire à l'aide d'orbites de période 1 au voisinage de Σ . Notons d'abord que la restriction de ω à $T\Sigma$

a un noyau de dimension 1 sur lequel λ ne s'annule pas. Si H est un hamiltonien autonome admettant Σ comme niveau régulier alors $X_H \in \ker \omega|_{T\Sigma}$ et $\lambda(X_H) \neq 0$.

Définition 1.1.2. *Le champ de Reeb (ou champ caractéristique) X_{Reeb} de Σ est défini par les deux propriétés suivantes : $X_{\text{Reeb}} \in \ker \omega|_{T\Sigma}$ et $\lambda(X_{\text{Reeb}}) = 1$. Une orbite de X_{Reeb} est appelée caractéristique de Σ .*

Remarquons que l'action $\int_{\gamma} \lambda$ d'une caractéristique fermée est égale à sa période. De plus, les orbites de X_H situées sur Σ sont en correspondance avec ses caractéristiques. Il est important de remarquer le fait que la dynamique hamiltonienne sur un niveau régulier ne dépend pas du hamiltonien mais du niveau : c'est un problème de nature géométrique.

Si l'on note par φ_X^t le flot du champ de Liouville, on voit que tout un voisinage \mathcal{V} de Σ est feuilleté par les hypersurfaces $\varphi_X^t(\Sigma)_{-\delta < t < \delta}$, $\delta > 0$ suffisamment petit. En vue de $\varphi_X^t \omega = e^t \omega$, leurs caractéristiques sont en correspondance biunivoque avec celles de Σ . Il est maintenant commode de changer de coordonnées via le symplectomorphisme

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \Psi : \Sigma \times [1 - \delta, 1 + \delta] &\xrightarrow{\sim} \mathcal{V}, \quad \delta > 0 \text{ petit}, \\ \Psi(p, S) &= \varphi_X^{\ln(S)}(p), \end{aligned}$$

vérifiant

$$\Psi^* \lambda = S \cdot \lambda|$$

où $\lambda|$ désigne la restriction de $\lambda = \iota_X \omega$ à $T\Sigma$. Le hamiltonien autonome

$$H : \Sigma \times [1 - \delta, 1 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H(p, S) = h(S), \quad h : [1 - \delta, 1 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifie $X_H(p, S) = -h'(S)X_{\text{Reeb}}$. Ses orbites de période 1 situées sur le niveau S correspondent aux caractéristiques de période $h'(S)$ situées sur Σ (et parcourues en sens inverse). En étudiant les orbites de période 1 des hamiltoniens de ce type on aura étudié en fait les caractéristiques sur Σ : plus la variation de h sera grande dans le petit intervalle $[1 - \delta, 1 + \delta]$, plus on aura attrapé de caractéristiques.

Un invariant raisonnable d'homologie de Floer pour une variété à bord devrait prendre en compte la topologie de la variété et *toutes* les caractéristiques fermées sur son bord. On retombe sur le principe commun sous-jacent aux constructions de [FH1, CFH2, CFHW2, V2] : la cohomologie

$$(1.7) \quad FH^*(M) = \lim_{(H, J)} FH^*(M; H, J)$$

sera définie comme une limite selon une *famille admissible* de hamiltoniens, de plus en plus croissants vers le bord. Comme nous l'avons annoncé plus haut, cette limite est inductive, respectivement projective, selon qu'on choisit un formalisme homologique ou cohomologique. Une subtilité supplémentaire qui vise à affiner l'invariant consiste à utiliser une troncature par les niveaux de l'action. Elle sera clarifiée plus bas, lors de la description des trois points de vue déjà présents dans la littérature.

Homologie symplectique d'un ouvert borné $U \subset (\mathbb{C}^n, \omega_0)$. Cette définition a été introduite par A. Floer et H. Hofer dans l'article [FH1]. Nous la présentons ci-dessous en variante cohomologique, alors que l'article initial adopte le point de vue homologique. Ses deux traits caractéristiques sont les suivants :

- a. elle est “extrinsèque” au sens où les hamiltoniens sont définis sur l'espace ambiant \mathbb{C}^n ;
- b. la définition est valable pour des ouverts quelconques, sans hypothèse de régularité sur le bord et encore moins de type contact.

La classe $\mathcal{H}(U)$ des hamiltoniens admissibles $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par les propriétés suivantes:

- 1. $H|_{\mathbb{S}^1 \times \tilde{U}} < 0$;
- 2. il existe une matrice A définie positive telle que

$$\frac{|H'(t, u) - Au|}{|u|} \longrightarrow 0, \quad |u| \rightarrow \infty$$

uniformément en $t \in \mathbb{S}^1$;

- 3. le système différentiel

$$-i\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x(1)$$

admet seulement la solution triviale $x \equiv 0$;

- 4. il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|H''(t, u)\| \leq c, \quad \forall t \in \mathbb{S}^1, u \in \mathbb{C}^n,$$

$$\left| \frac{\partial H'}{\partial t}(t, u) \right| \leq c(1 + |u|), \quad \forall t \in \mathbb{S}^1, u \in \mathbb{C}^n.$$

On note $\mathcal{H}_{reg}(U)$ la classe des hamiltoniens admissibles ayant toutes les orbites 1-périodiques non dégénérées : c'est une partie de $\mathcal{H}(U)$ qui est dense au sens de Baire. On note \mathcal{J} la classe des structures presque complexes compatibles avec ω_0 qui coïncident avec i en dehors d'un compact. La transversalité dans l'équation de Floer est vérifiée pour un ensemble dense au sens de Baire $\mathcal{H}\mathcal{J}_{reg}(U) \subset \mathcal{H}_{reg}(U) \times \mathcal{J}$ et les groupes de cohomologie tronqués par l'action sont définis pour une paire régulière comme suit :

$$FC_{]a, +\infty[}^k(H, J) = \bigoplus_{\substack{-i_{CZ}(x) = k \\ A_H(x) > a}} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

$$FH_{]a, +\infty[}^*(H, J) = H^*(FC_{]a, +\infty[}^*(H, J)),$$

$$FC_{]a, b]}^*(H, J) = FC_{]a, +\infty[}^*(H, J) / FC_{]b, +\infty[}^*(H, J), \quad -\infty \leq a < b < +\infty,$$

$$FH_{]a, b]}^*(H, J) = H^*(FC_{]a, b]}^*(H, J)).$$

La limite inverse (1.7) est prise par rapport à la relation suivante d'ordre partiel sur $\mathcal{H}\mathcal{J}_{reg}(U)$, qui induira un système projectif en cohomologie :

$$(H, J) \prec (K, \tilde{J}) \quad \text{ssi} \quad H(t, u) \leq K(t, u).$$

Le système projectif cohomologique est déterminé de la façon suivante. Pour deux paires ordonnées $(H, J) \prec (K, \tilde{J})$ on considère une homotopie $(H(s, t, u), J(s, t, u))$ telle que :

- Il existe $s_0 > 0$ tel que $(H(s, t, u), J(s, t, u)) \equiv (H(t, u), J(t, u)), \quad s \leq -s_0$
 $(K(t, u), \tilde{J}(t, u)), \quad s \geq s_0 \quad ;$
- L'homotopie est croissante par rapport à s i.e. $\frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u) \geq 0$;
- Elle vérifie certaines conditions supplémentaires de croissance à l'infini et de régularité, qui seront explicitées et généralisées dans la seconde partie de ce chapitre.

Le rôle des trajectoires vérifiant (1.4 - 1.5) est pris par les solutions de l'équation de Floer à paramètre

$$(1.8) \quad u_s + J(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) = 0 ,$$

$$(1.9) \quad u(s, t) \longrightarrow x^\pm, \quad s \longrightarrow \pm\infty ,$$

avec x^- et x^+ des orbites 1-périodiques de H et K respectivement. L'espace $\mathcal{M}(x^-, x^+)$ des solutions de (1.8 - 1.9) a comme dimension $-i_{CZ}(x^-) - (-i_{CZ}(x^+))$ mais, à la différence de (1.4 - 1.5), il n'est plus muni d'une action de \mathbb{R} par translation. Cela fait qu'il n'est plus vide génériquement si sa dimension formelle est nulle et le morphisme de complexes défini à la manière de (1.3') respectera alors les degrés:

$$(1.10) \quad \sigma : FC_{[a, \infty]}^*(K, \tilde{J}) \longrightarrow FC_{[a, \infty]}^*(H, J) ,$$

$$\sigma \langle x^+ \rangle = \sum_{i_{CZ}(x^-) = i_{CZ}(x^+)} \# \mathcal{M}(x^-, x^+) \langle x^- \rangle .$$

L'application σ est bien définie puisque l'action est décroissante le long des solutions de l'équation à paramètre (1.8). Cela est dû au fait que les homotopies considérées sont croissantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} A_{H(s)}(u(s, \cdot)) &= - \int_{\mathbb{S}^1} \omega(u_s, u_t - X_{H(s)}(u(s, t))) dt - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u(s, t)) dt \\ &= - \int_{\mathbb{S}^1} \omega(u_s, J(s, t, u(s, t))u_s) dt - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u(s, t)) dt \\ &= -|u_s|_{g_{J(s)}}^2 - \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u(s, t)) dt \leq 0 . \end{aligned}$$

Le morphisme σ commute avec la différentielle et passe en cohomologie pour définir le “morphisme de monotonie”

$$(1.11) \quad FH_{[a, b]}^*(K, \tilde{J}) \xrightarrow{\sigma_{(H, J)}^{(K, \tilde{J})}} FH_{[a, b]}^*(H, J) .$$

Comme dans le cas compact, deux homotopies admissibles induisent le même morphisme entre les groupes d'homologie de Floer et on a de plus

$$\sigma_{(H, J)}^{(K, \tilde{J})} \circ \sigma_{(K, \tilde{J})}^{(K', \tilde{J}')} = \sigma_{(H, J)}^{(K', \tilde{J}')} ,$$

pour $(H, J) \prec (K, \tilde{J}) \prec (K', \tilde{J}')$. On définit alors

$$FH_{[a,b]}^*(U) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ (H, J)}} FH_{[a,b]}^*(H, J), \quad -\infty \leq a < b < +\infty,$$

$$FH_{[a, +\infty[}^*(U) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ (H, J)}} FH_{[a, +\infty[}^*(H, J)$$

et on obtient en particulier

$$FH_{[a, +\infty[}^*(U) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ b}} FH_{[a,b]}^*(U), \quad b \rightarrow +\infty.$$

Les morphismes “de troncature” $FH_{[a,b]}^*(U) \rightarrow FH_{[a,b']}^*(U)$, $b \geq b'$ sont induits par les inclusions $FC_{[a, \infty[}^*(H, J) \hookrightarrow FC_{[a', \infty[}^*(H, J)$, $a \geq a'$ qui déterminent les flèches

$$FH_{[a,b]}^*(H, J) \rightarrow FH_{[a',b']}^*(H, J), \quad a \geq a', \quad b \geq b'$$

compatibles avec les morphismes de monotonie. Pour a fixé les groupes $FH_{[a,b]}^*(H, J)$ forment un système projectif bidirigé et, vu que deux limites projectives (ou inductives) commutent on pourra écrire

$$FH_{[a, +\infty[}^*(U) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ b}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ (H, J)}} FH_{[a,b]}^*(H, J) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ (H, J)}} \lim_{\substack{\leftarrow \\ b}} FH_{[a,b]}^*(H, J), \quad b \rightarrow \infty.$$

Nous verrons plus bas (cf. 1.1.4) que, pour un ouvert U à bord de type contact restreint, les groupes $FH_{[a, +\infty[}^*(U)$ ne dépendent pas de a lorsque celui-ci est négatif. Cela est une conséquence de l'existence d'une famille cofinale dont les orbites 1-périodiques ont toutes une action positive ou arbitrairement proche de zéro [He1, V2]. De toutes façons, on pose

$$(1.12) \quad FH^*(U) = FH_{[-\infty, +\infty[}^*(U).$$

Pour les ouverts à bord de type contact restreint on aura alors $FH^*(U) = FH_{[a, +\infty[}^*(U)$, $a < 0$.

Le formalisme des passages à la limite mis à part, la présente version de l'homologie de Floer demande un ingrédient essentiellement nouveau par rapport au cas des variétés fermées, à savoir l'existence de bornes C^0 qui assurent le fait que, à extrémités fixées, les trajectoires restent toutes dans un compact. Dans la deuxième section de ce chapitre je présente une version généralisée d'homologie de Floer pour des variétés à bord de type contact et l'existence de bornes C^0 a priori constituera la partie principale du travail qui devra être fourni pour prouver sa bonne définition.

Notons que, de la même manière, on pourra définir des groupes d'homologie de Floer en considérant la différentielle de Floer homologique selon (1.3) (c'est d'ailleurs le cadre original de [FH1]). Les sous-complexes préservés par la différentielle seront

$$FC_*^{[-\infty, a]}(H, J) = \bigoplus_{A_H(x) < a} \mathbb{Z}\langle x \rangle, \quad a \leq \infty$$

et les morphismes de monotonie et de troncature définiront un système bidirigé *inductif*:

$$FH_*^{[a, +\infty[}(U) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ b}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ (H, J)}} FH_*^{[a,b]}(H, J) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ (H, J)}} \lim_{\substack{\rightarrow \\ b}} FH_{[a,b]}^*(H, J), \quad b \rightarrow \infty.$$

Cette distinction n'est pas sans importance : la limite inductive est un foncteur exact, alors que la limite projective est juste un foncteur exact à gauche (par contre, c'est un foncteur exact si les éléments du système dirigé sont des espaces vectoriels de dimension finie [ES] Ch. VIII). Cela aura des conséquences non triviales par la suite : nous obtiendrons une formule de Künneth en *homologie* de Floer valable à coefficients entiers et une formule de Künneth en *cohomologie* de Floer valable uniquement à coefficients dans un corps.

Homologie symplectique des ouverts relativement compacts dans des variétés à bord de type contact. Cette définition a été introduite par K. Cieliebak, A. Floer et H. Hofer dans l'article [CFH2]. Elle a été utilisée sous une forme légèrement différente dans [CFHW2] pour démontrer la stabilité du spectre d'action pour une variété symplectique à bord de type contact.

Les hamiltoniens admissibles pour un ouvert relativement compact $U \subset M \setminus \partial M$ sont définis par les propriétés suivantes :

- $H|_{\mathbb{S}^1 \times \bar{U}} < 0$;
- $H \equiv m(H) = \max H > 0$ au voisinage de ∂M ;
- les orbites périodiques avec $\int_0^1 H(t, x(t)) dt < m(H)$ sont non dégénérées.

Les définitions du complexe de Floer et des groupes de (co)homologie sont tout à fait similaires au cas des ouverts de \mathbb{C}^n , alors que l'existence de bornes C^0 sera remplacée dans ce cas par le fait que les trajectoires de Floer qui relient des orbites non dégénérées restent à une distance minorée du bord.

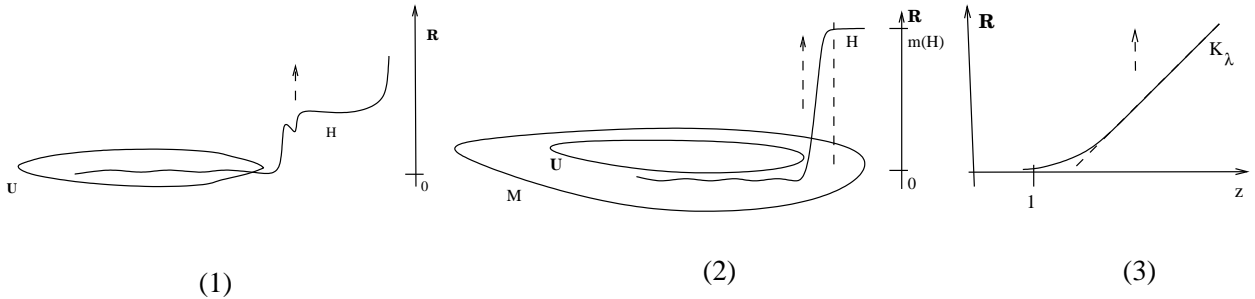


Fig. 1.1: Familles admissibles : (1) - [FH1], (2) - [CFH2], (3) - [V2]

Homologie symplectique des variétés compactes à bord de type contact. Cette approche a été développée par C. Viterbo dans l'article [V2]. Par rapport aux deux constructions précédentes, elle isole directement les spécificités des groupes de cohomologie de Floer qui sont liées à la conjecture de Weinstein. Le point d'intérêt principal sont les caractéristiques sur le bord de la variété M . On définit la complétion symplectique de M comme

$$\widehat{M} = M \cup_{\partial M \times \{1\}} \partial M \times [1, +\infty[,$$

$$\widehat{\omega} = \begin{cases} \omega & \text{sur } M \\ d(S\lambda) & \text{sur } \partial M \times [1, +\infty[. \end{cases}$$

Le recollement est réalisé par l'intermédiaire du difféomorphisme (1.6) induit par le flot de Liouville. Formellement, les hamiltoniens admissibles sont des K_μ , $\mu > 0$ tels que $K_\mu \equiv 0$ sur M , $K_\mu(t, p, S) = k_\mu(S)$ sur $\partial M \times [1, +\infty)$, avec $k'_\mu(S) = \mu$ pour $S \geq 1^+$ et k_μ convexe. Nous les avons représentés dans la figure 1.1-(3). Les homotopies les reliant seront choisies croissantes et convexes.

Les orbites 1-périodiques de K_μ sont les constantes à l'intérieur de M et les caractéristiques sur ∂M ayant une action au plus égale à μ . Comme K_μ est indépendant du temps, toute orbite est au mieux transversalement non dégénérée et il faudra penser en pratique à une famille de hamiltoniens perturbés \tilde{K}_μ . Des détails complets les concernant sont fournis dans la thèse de D. Hermann [He1] et la technique de perturbation est due à [FW1] : une orbite périodique transversalement non dégénérée doit être vue comme un cercle critique de Morse-Bott et une petite perturbation dépendant du temps le “casse” en deux orbites non dégénérées, correspondant aux points critiques d'une fonction de Morse sur \mathbb{S}^1 . Je donne des explications supplémentaires sur ce point de vue dans la section 1.1.5. Les hamiltoniens perturbés \tilde{K}_μ vérifient

- $\tilde{K}_\mu \leq \tilde{K}_{\mu'}$ si $\mu \leq \mu'$;
- $(\tilde{K}_\mu)_{\mu > 0}$ est une famille cofinale pour la classe des hamiltoniens $H : \mathbb{S}^1 \times \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient $H < 0$ sur $M \setminus \partial M$;

L'existence de bornes C^0 pour les trajectoires de Floer constitue à nouveau le point crucial de la construction. A la différence des constructions précédentes et grâce à la forme spéciale des hamiltoniens et des homotopies, un argument géométrique fondé sur la convexité holomorphe permet de conclure.

Définition 1.1.3. *Soit J une structure presque complexe compatible avec la forme symplectique ω . Une hypersurface $\Sigma \subset M$ est dite J -convexe si elle peut s'écrire localement comme un niveau régulier d'une fonction plurisousharmonique i.e. satisfaisant $dd^c \varphi \leq 0$, où $d^c = J^*d$.*

Exemple : si M est une variété à bord de type contact alors $\partial M \times \{S_0\} \subset \partial M \times [1 - \epsilon, \infty[$ est une hypersurface J -convexe par rapport à toute structure presque complexe compatible avec $\omega = d(S\lambda)$ qui est de la forme

$$\begin{cases} J_{(p,S)}|_\xi = J_0, \\ J_{(p,S)}(\frac{\partial}{\partial S}) = \frac{1}{S}X_{\text{Reeb}}(p), \\ J_{(p,S)}(X_{\text{Reeb}}(p)) = -S\frac{\partial}{\partial S}. \end{cases}$$

En effet, $\varphi(p, S) = S$ est une fonction plurisousharmonique : $dd^c S = d(-S\lambda) = -\omega \leq 0$.

Lemme 1.1.4. (H. Hopf, voir aussi [McD]) *Soient $\Sigma \subset M$ une hypersurface J -convexe et φ une fonction de définition (locale). Aucune courbe J -holomorphe $u : (D^2(0, 1), i) \rightarrow M$ ne peut être tangente à Σ par l'intérieur i.e. $\varphi \circ u$ ne peut pas avoir de maximum local.*

Démonstration. Désignons par $z = s + it$ la coordonnée complexe sur $D^2(0, 1)$ et $J_0 = i$ la structure complexe standard sur le disque. D'un côté on a $dd_{J_0}^c(\varphi \circ u) = -\Delta(\varphi \circ u)ds \wedge dt$. Par J -holomorphicité de u on obtient aussi $dd_{J_0}^c(\varphi \circ u) = dJ_0^*u^*d\varphi = du^*J^*d\varphi = u^*dd_J^c\varphi$. La plurisousharmonicité de φ entraîne $\Delta(\varphi \circ u) \geq 0$ et le principe du maximum démontre l'affirmation. \square

Un calcul similaire et le principe du maximum appliqué à une équation aux dérivées partielles elliptique du second ordre ayant des termes du premier ordre démontre le

Lemme 1.1.5. [V2] *Une solution $u : (D^2(0, 1), i) \longrightarrow \partial M \times [1 - \epsilon, \infty[$ de l'équation de Floer $u_s + J(s, t)u_t - \nabla H(s, t, u(s, t)) = 0$ avec $H(s, t, p, S) = h(s, t, S)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial S} \geq 0$ ne peut être tangente par l'intérieur à $\partial M \times \{S_0\}$.*

L'existence de bornes C^0 découle alors de ce que, pour des valeurs génériques de μ , les orbites 1-périodiques des K_μ sont toutes localisées au voisinage de M . Comme les trajectoires de Floer ont comme asymptotes des orbites 1-périodiques, elles pourraient quitter le voisinage de M en question uniquement en touchant un certain $\partial M \times \{S_0\}$ par l'intérieur, ce qui est interdit.

On définira comme plus haut les groupes $FH_{]a, +\infty[}^*(M)$, $-\infty \leq a < \infty$. Le phénomène nouveau qui se produit est que ceux-ci ne dépendent pas de a dès que $a < 0$. La raison est très simple: dans la famille cofinale que nous considérons maintenant l'action des orbites devient plus grande que $-\delta$, avec $\delta > 0$ arbitraire fixé. En effet, les orbites tombent en deux catégories: d'un côté les points critiques de H à l'intérieur de M , avec action proche de zéro, d'un autre les orbites correspondant aux caractéristiques fermées sur ∂M , dont l'action approxime l'aire (positive) de ces dernières. On aura donc

$$FH^*(M) = FH_{]a, +\infty[}^*(M), \quad a < 0.$$

1.1.4 Commentaires ; propriétés supplémentaires ; applications

Bornes C^0 . Comme nous l'avons déjà accentué, le point crucial dans la construction d'une (co)homologie de Floer dans le cas des variétés à bord est l'existence de bornes C^0 pour les trajectoires de Floer. L'argument géométrique de [V2] fonctionne exactement pour la classe de hamiltoniens et de déformations utilisées dans l'article, mais doit être modifié de façon non triviale lorsque la classe de hamiltoniens admissibles est élargie (en permettant une dépendance arbitraire de s ou encore de p dans $H(s, t, p, S)$). Cela justifie le travail supplémentaire de [FH1] et [CFH2]. Néanmoins, des variations du principe du maximum interviennent dans chacun des deux contextes: [FH1] Prop. 8 (Prop. 1.2.4) et [CFH2] p. 110. Pour la preuve de la formule de Künneth et la construction de la suite spectrale, j'utiliserai une définition de l'homologie similaire à [V2], tout en élargissant la classe des hamiltoniens admissibles sur le modèle de [FH1]. Cela m'amènera à adapter les idées de [FH1], p. 48-56 dans le contexte de [V2] afin d'établir les indispensables bornes C^0 : c'est le contenu de la deuxième partie de ce chapitre.

Relations entre les différentes homologies symplectiques. D. Hermann [He2], §4.3 prouve que l'homologie au sens de [FH1] d'un ouvert borné de type contact restreint $U \subset \mathbb{C}^n$ coïncide avec son homologie de Floer au sens de [V2], et cela pour n'importe quel intervalle fixé de l'action. La preuve consiste à mettre en évidence une suite cofinale de hamiltoniens admissibles au sens de [FH1] qui calculent $FH_{*}^{]a, b]}(U)$ et dont les orbites périodiques sont séparées en deux groupes: d'un côté des orbites d'action positive ou proche de zéro, d'un autre des orbites dont l'action tend uniformément vers $-\infty$ et qui par conséquent n'entreront pas en compte dans le calcul de l'homologie. La suite cofinale est construite de manière à ce que les orbites du premier type puissent être réalisées par un hamiltonien admissible au sens de [V2]. L'isomorphisme découle de l'identification des trajectoires de Floer dans les deux contextes. On obtient en particulier l'indépendance de $FH_{]a, +\infty[}^*(U)$ par rapport à a lorsque $a < 0$.

Par contre, je ne connais pas de construction similaire qui identifierait les approches de [CFH2] et [V2]. Les orbites 1-périodiques ne peuvent plus être séparées de façon convenable par l'action comme dans [He2] et, pour les mêmes valeurs de troncature, le complexe de [CFH2] fait généralement intervenir strictement plus d'orbites que celui de [V2]. En interprétant la présence de générateurs “parasites” dans le complexe de Floer comme favorisant l'annulation en homologie des générateurs intéressants (les orbites correspondant aux caractéristiques fermées), alors j'affirmerais que, de façon heuristique, l'homologie au sens de [V2] renferme plus d'informations que celle de [CFH2].

Remplissages symplectiques. Dans [CFHW2] les auteurs considèrent une variante de la définition de [CFH2] - basée sur une autre classe de hamiltoniens admissibles, satisfaisant $m(H) = 0$ - qui dépend uniquement de l'intérieur de la variété et qui “attrape” le spectre d'action du bord. Pourtant, elle ne peut pas mettre en évidence un complexe qui prenne en compte exactement *une* contribution homologique pour chaque caractéristique *et* la topologie de la variété via les points critiques intérieurs du hamiltonien. Cela est réalisé par la version [V2] de l'homologie qui, néanmoins, dépend intrinséquement de la variété *et* de son bord. Il serait intéressant de trouver une version de l'homologie qui dépende uniquement de l'intérieur de la variété et qui arrive à isoler un complexe comme ci-dessus. Cela pourrait mener à des obstructions topologiques sur les remplissages symplectiques de certaines variétés de contact, éventuellement via une relation qui reste à établir avec l'homologie de contact.

Invariance par isotopie. L'homologie de Floer satisfait à deux importantes propriétés d'invariance : par rapport à des déformations de hamiltoniens et par rapport à des déformations de formes symplectiques. Nous les énonçons de façon précise ci-dessous. L'invariance hamiltonienne est valable sous des hypothèses plus générales que celles que nous indiquons, notamment pour certaines homotopies non croissantes. Néanmoins il nous suffira de travailler avec le

Théorème 1.1.6. [V2] *Soit $H(s)$, $s \in [0, 1]$ une déformation admissible i.e. satisfaisant aux conditions (1.26 - 1.30). Soient aussi a_s , b_s des familles continues de paramètres de \mathbb{R} telles que $H(s)$ n'ait pas d'orbites 1-périodiques d'action égale à a_s ou b_s . Alors il y a un isomorphisme canonique*

$$FH_{[a_0, b_0]}^*(H_0) \xrightarrow{\sim} FH_{[a_1, b_1]}^*(H_1) ,$$

obtenu de la manière usuelle en considérant les solutions de l'équation (1.8 - 1.9).

Noter que l'hypothèse entraîne en particulier $H_0 \prec H_1$. L'invariance de l'homologie de Floer par déformation des formes symplectiques est apparentée au résultat précédent pour $a_s \equiv -\infty$, $b_s \equiv +\infty$:

Théorème 1.1.7. [V2] *Soit M une variété compacte à bord et ω_s , $s \in [0, 1]$ une isotopie de formes symplectiques par rapport auxquelles le bord ∂M reste de type contact. On a un isomorphisme $FH^*(M, \omega_0) \simeq FH^*(M, \omega_1)$.*

L'isomorphisme est toujours obtenu en comptant les solutions d'une équation similaire à (1.8) et le fait de considérer l'homologie sans troncature sur les valeurs de l'action est crucial pour la bonne définition du morphisme. Il est important de réaliser que l'isotopie ne doit pas nécessairement préserver la classe de cohomologie de la forme symplectique. Je donne ci-dessous un corollaire utile qui montre que l'homologie de Floer non tronquée d'une variété à bord M est en réalité un invariant de sa complétée \bar{M} . Je présente une formulation pour des ouverts

à bord lisse pour la seule raison de pouvoir appliquer tel quel le théorème précédent, énoncé pour des *variétés* à bord. Ce résultat est à mettre en relation avec la définition 1.2.2. et j'en donne une version plus générale au 1.2.9. D'ailleurs, ce résultat d'invariance par isotopie soulève naturellement la question de l'invariance *différentiable* de l'homologie de Floer des variétés à bord.

Corollaire 1.1.8. *Soient U , U' deux ouverts à bord lisse de \widehat{M} satisfaisant aux conditions suivantes:*

- ∂U et $\partial U'$ sont contenus dans le domaine de définition du champ de Liouville étendu à \widehat{M} par $S \frac{\partial}{\partial S}$;
- le champ de Liouville est transverse et extérieur à ∂U , $\partial U'$.

Alors

$$FH^*(U) \simeq FH^*(U') .$$

Démonstration. On peut réaliser une isotopie différentiable entre U et U' le long du flot de Liouville, ce qui correspond à une isotopie de formes symplectiques sur U depuis sa forme symplectique initiale ω_0 jusqu'à celle induite par le difféomorphisme avec U' , soit-elle ω_1 . Par le théorème précédent on a $FH^*(U, \omega_0) \simeq FH^*(U, \omega_1)$. Par symplectomorphisme on a aussi $FH^*(U, \omega_1) \simeq FH^*(U', \omega_0)$, ce qui conclut la preuve. □

Applications à la conjecture de Weinstein. Nous avons déjà annoncé dans 1.1.3 que les groupes d'homologie de Floer sont utiles pour établir l'existence de caractéristiques fermées sur une hypersurface de type contact. Le premier outil clé est fourni par l'application

$$(1.13) \quad FH^*(M) \xrightarrow{c^*} H^{n+*}(M, \partial M), \quad n = \frac{1}{2} \dim M ,$$

obtenue en restreignant le domaine de l'action en vue de l'identité

$$FH_{(a, 0^+]}^*(M) \simeq H^{n+*}(M, \partial M), \quad a < 0 .$$

Ici 0^+ désigne un nombre positif suffisamment petit. Comme nous l'avons déjà indiqué au 1.1.2, en restreignant le domaine de l'action et en considérant des hamiltoniens autonomes H suffisamment petits en norme C^2 le complexe de Floer coïncide avec le complexe de Morse du champ ∇H . Par construction, ce dernier champ pointe vers l'extérieur le long de ∂M . On pourra trouver au 3.4.1 une preuve du fait qu'on obtient de cette façon l'homologie de M relative au bord, graduée selon l'indice de Morse des points critiques de $-H$ (la fonction pour laquelle ∇H est un pseudo-gradient négatif).

Par la construction même de l'homologie de Floer on voit que la non-bijectivité de c^* entraîne l'existence d'une caractéristique fermée sur ∂M , qui correspond à la présence dans le complexe de Floer d'un générateur autre qu'un point critique d'une fonction de Morse définie sur $\text{int}(M)$. En suivant [V2] nous posons la

Définition 1.1.9. [V2] *Une variété M satisfait à la conjecture de Weinstein algébrique (AWC) s'il existe un anneau de coefficients tel que l'application $FH^*(M) \xrightarrow{c^*} H^{n+*}(M, \partial M)$ ne soit pas un isomorphisme.*

Il est clair que AWC implique la validité de la conjecture de Weinstein pour ∂M . Dans certaines circonstances, que j'énonce plus bas, la propriété AWC est héritée par les sous-variétés de codimension 0 dans M et il sera utile de distinguer les situations où le morphisme $FH^*(M) \longrightarrow H^{n+*}(M, \partial M)$ est non injectif ou non surjectif (on dira que M satisfait au cas a), respectivement b) de la propriété AWC).

Le deuxième outil clé est fourni par l'existence [V2], §2 d'un morphisme de transfert

$$(1.14) \quad FH^*(W) \xrightarrow{Fj^!} FH^*(M) ,$$

associé à une inclusion de codimension zéro $W \xrightarrow{j} M$, où M est à bord de type contact et W est à bord de type contact restreint, au sens où la forme symplectique admet une primitive sur W telle que le champ de Liouville soit transverse à ∂W . De plus, la variété W doit vérifier une hypothèse supplémentaire concernant certaines trajectoires de Floer [V2], p. 1000. Le point en ce qui la concerne est que, si elle est violée et $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$, alors il y a une orbite périodique sur ∂W (cf. [V2], Thm. 4.1).

Voici une description succincte du morphisme (1.14). Un voisinage de ∂W dans W est trivialisé par le flot du champ de Liouville de W comme $\partial W \times]0, 1]$. Notons S_W la coordonnée sur le deuxième facteur. Un voisinage de ∂M est trivialisé de la façon habituelle par le flot du champ de Liouville de M comme $\partial M \times]1 - \delta, 1]$, $\delta > 0$ et on note S la coordonnée sur le deuxième facteur. Le morphisme $Fj^!$ est construit à l'aide d'une famille $H = H_{\mu, \lambda, \epsilon}$ de hamiltoniens qui prennent en compte les caractéristiques de ∂W et de ∂M et qui sont de la forme suivante: $H = h_\lambda(S_W)$, $\epsilon \leq S_W \leq 1$, $h'_\lambda = \lambda$ et $H = k_\mu(S)$, $S \geq 1$, $k'_\mu = \mu$, alors que $H = 0$ sur $W \setminus \partial W \times [\epsilon, 1]$ et $H = \lambda(1 - \epsilon)$ sur $M \setminus W$. Le morphisme de transfert provient du morphisme de troncature (pour une structure presque complexe J convenable)

$$FH^*_{]0-, b]}(H, J) \longrightarrow FH^*_{]a, b]}(H, J) ,$$

avec $a = a(\epsilon, \lambda) < 0$ suffisamment négatif et $b = b(\epsilon, \lambda) > 0$ suffisamment positif. Un argument d'isotopie identifie la limite (projective) selon ϵ, λ et μ dans le deuxième terme avec $FH^*(M)$. De même, sous l'hypothèse additionnelle mentionnée plus haut, le premier terme est identifié avec $FH^*_{]0-, b/\epsilon]}(K_\lambda)$, $K_\lambda = k_\lambda(S_W)$, $S_W \geq 1$ dans \widehat{W} , $K_\lambda = 0$ sur W . En passant à la limite (projective) selon λ et ϵ dans le premier terme, on obtient $FH^*(W)$.

La propriété fondamentale du morphisme de transfert est la commutativité du diagramme suivant, obtenue par une analyse attentive des différents morphismes de troncature par l'action qui y sont impliqués [V2] Thm. 3.1. :

$$(1.15) \quad \begin{array}{ccc} FH^*(W) & \xrightarrow{Fj^!} & FH^*(M) \\ c^* \downarrow & & \downarrow c^* \\ H^{n+*}(W, \partial W) & \xrightarrow{j^!} & H^{n+*}(M, \partial M) \end{array}$$

Cela permet de déduire, par exemple, l'affirmation suivante:

Proposition 1.1.10. ([V2], Thm. 4.1) *Soit M une variété symplectique connexe de dimension $2n$ telle que le morphisme $FH^n(M) \xrightarrow{c^*} H^{2n}(M, \partial M)$ n'est pas surjectif. Toute sous-variété $W \xrightarrow{j} M$ à bord de type contact restreint admet une caractéristique fermée sur ∂W .*

Démonstration. En effet, soit la condition dont il est question ci-dessus n'est pas vérifiée et il y a une caractéristique sur ∂W , soit elle l'est et on a le diagramme commutatif (1.15). Le morphisme $H^{2n}(W, \partial W) \rightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ est bijectif si W est connexe ou surjectif si W est disconnexe. L'hypothèse entraîne la non-surjectivité de $FH^n(W) \rightarrow H^{2n}(W, \partial W)$ et donc l'existence d'une caractéristique sur ∂W . \square

Remarque. Si on travaille à coefficients dans un corps et la variété M est connexe, la non-surjectivité du morphisme $FH^n(M) \rightarrow H^{2n}(M, \partial M)$ équivaut à son annulation.

Je vais expliquer dans la section suivante l'égalité

$$FH^*(D^{2n}) = 0, \quad D^{2n} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq 1\}.$$

Cela entraîne tout de suite, avec le résultat précédent, la conjecture de Weinstein pour les hypersurfaces à bord de type contact restreint dans \mathbb{C}^n (voir [V1] pour la preuve de l'existence de caractéristiques fermées sur les hypersurfaces à bord de type contact).

Le théorème 4.2 de [V2] démontre qu'une variété de Stein sous-critique de dimension $2n$ (i.e. ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension $n - 1$) satisfait toujours le cas b) de la propriété AWC : le morphisme $FH^n(M) \xrightarrow{c_*} H^{2n}(M, \partial M)$ n'est pas surjectif. On déduit par le même argument l'existence d'une caractéristique fermée sur toute hypersurface de type contact restreint.

A part l'exemple de $FH^*(D^{2n})$ et le résultat général concernant les variétés de Stein sous-critiques, il y a un seul autre calcul explicite d'homologie de Floer dans la littérature ([V3, SW, Sch2]) :

$$FH^*(DT^*N) = H^*(\Lambda N),$$

avec N une variété riemannienne fermée, $DT^*N = \{v \in T^*N : |v| \leq 1\}$ et ΛN désigne l'espace des lacets de N . Le morphisme c^* coïncide, modulo l'isomorphisme de Thom, avec la surjection $H^*(\Lambda N) \rightarrow H^*(N)$ induite par l'inclusion $N \hookrightarrow \Lambda N$. Dans cette situation, c'est une version équivariante de l'homologie de Floer [V2] §5 qui sera efficace pour démontrer l'existence de caractéristiques fermées, mais elle ne fait pas l'objet de cette thèse.

Le peu de calculs explicites d'homologie de Floer rend intéressante la recherche de structures algébriques qui refléteraient la présence de structures géométriques supplémentaires sur la variété symplectique ambiante. Cette thèse traite précisément certains cas de structures fibrées : une des applications principales sera la preuve de la conjecture de Weinstein pour des hypersurfaces de fibrés en droites hermitiens à courbure négative.

Avant de clore cette section, notons que les résultats précédents ont des analogues en homologie. On a toujours un morphisme

$$(1.16) \quad H_{n+*}(M, \partial M) \xrightarrow{c_*} FH_*(M)$$

obtenu en restreignant le domaine de l'action, ainsi qu'un morphisme de transfert

$$FH_*(M) \xrightarrow{Fj_!} FH_*(W)$$

défini sous les mêmes hypothèses que plus haut. Celui-ci s'insère dans le diagramme commutatif

$$(1.17) \quad \begin{array}{ccc} FH_*(W) & \xleftarrow{Fj_!} & FH_*(M) \\ c_* \uparrow & & \uparrow c_* \\ H_{n+*}(W, \partial W) & \xleftarrow{j_!} & H_{n+*}(M, \partial M) \end{array}$$

La démonstration de ces deux affirmations est duale à celle de [V2].

1.1.5 Un exemple: la cohomologie de Floer d'une boule dans \mathbb{C}^n

Les groupes de cohomologie de Floer $FH_{[a,b]}^*$ de la boule $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ ont été calculés pour la première fois dans [FW1], avec ceux des ellipsoïdes et des polydisques, pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ arbitraires. On y démontre en particulier que les groupes de cohomologie non tronquée sont nuls : $FH^*(D^{2n}) = 0$. La méthode de [FW1] consiste à approcher l'homologie de la boule par celle d'un ellipsoïde générique dont les caractéristiques sont transversalement non dégénérées. L'homologie de ce dernier est étudiée par une technique de perturbation, qui brise chaque caractéristique en deux orbites non dégénérées, correspondant aux deux points critiques d'une fonction de Morse sur \mathbb{S}^1 . La différence des indices de Conley-Zehnder des deux orbites en question est égale à $1 = \dim \mathbb{S}^1$. La même technique de perturbation est utilisée dans [CFHW2] pour calculer une homologie de Floer locale et en déduire la stabilité du spectre d'action du bord d'une variété symplectique.

Sur la sphère $\mathbb{S}^{2n-1} = \partial D^{2n}$ les caractéristiques sont les grands cercles et leurs multiples positifs. Ils apparaissent en familles paramétrées par \mathbb{S}^{2n-1} . Je présente dans cette section une perturbation adaptée d'après [FW1] qui brise directement chaque telle variété d'orbites périodiques en deux orbites non dégénérées, dont la différence des indices de Conley-Zehnder est égale à $2n - 1 = \dim \mathbb{S}^{2n-1}$. L'intérêt de ce point de vue est multiple : il permet de visualiser directement l'annulation de l'homologie de Floer des boules, sans passer par l'intermédiaire des ellipsoïdes ; il apporte des éclaircissements à la preuve de l'annulation de $FH^*(D^{2n})$ présente dans [V2] ; il met en jeu des calculs intéressants d'indice de Conley-Zehnder ; enfin, il peut éclairer comme cas particulier les constructions de M. Pozniak [Po], §3.4 et P. Biran, L. Polterovich, D. Salamon [BPS], §5.2 pour le calcul de l'homologie de Floer locale d'une intersection lagrangienne et, respectivement, d'un hamiltonien admettant une variété d'orbites périodiques non dégénérée au sens de Morse-Bott.

Calcul direct de la cohomologie d'une boule. On identifie \mathbb{C}^n avec \mathbb{R}^{2n} en associant à $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. On considère sur \mathbb{C}^n la forme symplectique standard $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ avec la primitive $\lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i$. Le champ de Liouville associé $X(z) = \frac{1}{2}z$, $z \in \mathbb{C}^n$ est transverse à toutes les sphères centrées en l'origine. On travaille avec la structure complexe standard donnée par la multiplication complexe avec i , à savoir $J(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n)$. Le champ de Reeb sur \mathbb{S}^{2n-1} est $X_{\text{Reeb}}(z) = 2Jz$ et ses orbites fermées sont les grands cercles et leurs multiples, avec action $k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$. Il est clairement possible de construire une famille cofinale de hamiltoniens admissibles de la forme $H_\lambda(z) = \rho(|z|^2)$, avec $\rho : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $\rho|_{[0,1]} < 0$, $\rho'' \geq 0$, $\rho'|_{[1+\epsilon, \infty[} = \lambda$, $\rho'|_{[0, 1+\epsilon)} > 0$, $\epsilon = \epsilon(\lambda) > 0$. Lorsque $\lambda > 0$ n'est pas un multiple de π les orbites 1-périodiques de H_λ sont paramétrées par le point critique 0 (orbite constante) et les sphères $\{z : \rho'(|z|^2) = l\pi\}$, $1 \leq l \leq k$ où $k\pi < \lambda < (k+1)\pi$.

Soient donc $\lambda \neq k\pi$ et b suffisamment grand par rapport à λ (par exemple $b > \lambda + 1$). Alors

$$(1.18) \quad FH_{[-\infty, b]}^*(H_\lambda) = FH_{[-\infty, b]}^*(\lambda|z|^2 - c),$$

où $0 < c \leq 1$ est une constante telle que $\lambda|z|^2 - c \leq H_\lambda$. Noter qu'il est toujours possible de choisir $c \leq 1$ si λ est suffisamment grand, à cause de la cofinalité de $(H_\lambda)_\lambda$. On peut alors réaliser une homotopie admissible de $\lambda|z|^2 - c$ vers H_λ par des hamiltoniens du même type que

H_λ . Les orbites périodiques créées correspondent à des caractéristiques fermées sur \mathbb{S}^{2n-1} . On voit facilement que leur action ne traversera pas b et le théorème d'invariance par isotopie 1.1.6 permet d'obtenir (1.18).

Pour fixer les idées, supposons $k\pi < \lambda < (k+1)\pi$. Le hamiltonien $Q_\lambda = \lambda|z|^2 - c$ a une unique orbite 1-périodique : la constante $z = 0$. Nous avons vu plus haut que la graduation naturelle sur la (co)homologie de Floer est donnée par l'indice de Conley-Zehnder pris avec le signe opposé. Cela revient à calculer l'indice des orbites 1-périodiques du champ $-X_{Q_\lambda}(z) = 2\lambda Jz$, dont le flot est $\varphi_t(z) = e^{2i\lambda t}z$. Son linéarisé est $d\varphi_t(z) \cdot Y = e^{2i\lambda t}Y$, ou encore

$$d\varphi_t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\lambda t & -\sin 2\lambda t \\ \sin 2\lambda t & \cos 2\lambda t \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} \cos 2\lambda t & -\sin 2\lambda t \\ \sin 2\lambda t & \cos 2\lambda t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Son indice de Conley-Zehnder est $i_{CZ}(d\varphi_t) = n \cdot i_{CZ}\left(\begin{pmatrix} \cos 2\lambda t & -\sin 2\lambda t \\ \sin 2\lambda t & \cos 2\lambda t \end{pmatrix}\right) = n(2k+1)$: le chemin $t \mapsto e^{2i\lambda t}$ dans $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ a des croisements intérieurs pour $t = l\pi/\lambda$, $1 \leq l \leq k$ et un croisement initial pour $t = 0$, avec une forme d'intersection constante de signature 2. On déduit la cohomologie non tronquée

$$FH^*(H_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = n(2k+1), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent $FH^*(D^{2n}) = \varprojlim FH^*(H_\lambda) = 0$. Ceci est l'argument de C. Viterbo [V2] pour démontrer l'annulation de l'homologie non tronquée de la boule.

Point de vue alternatif : perturbation de variétés critiques de Morse-Bott. Je présente maintenant un point de vue alternatif, en perturbant directement les variétés critiques de H_λ . Calculons d'abord les indices de Robbin-Salamon i_{RS} des orbites 1-périodiques de H_λ , $k\pi < \lambda < (k+1)\pi$ parcourues dans le sens inverse : l'indice de Robbin-Salamon [RS1] généralise l'indice de Conley-Zehnder à des chemins arbitraires de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. On a $-X_{H_\lambda}(z) = 2\rho'(|z|^2)Jz$ avec le flot $\varphi_t(z) = e^{2\rho'(|z|^2)Jt}z$. Le linéarisé du flot est

$$d\varphi_t(z) \cdot Y = e^{2\rho'(|z|^2)Jt} \cdot Y + 2\rho''(|z|^2)Jt \cdot e^{2\rho'(|z|^2)Jt} \cdot 2\langle z, Y \rangle \cdot z$$

Pour $z = 0$ le linéarisé est $d\varphi_t(0) = e^{2\rho'(0)Jt}$ et satisfait à l'équation différentielle $\dot{\Psi}(t) = J \operatorname{diag}(2\rho'(0)) \Psi(t)$, $\Psi(0) = \operatorname{Id}$. Pour λ suffisamment grand la cofinalité de H_λ impose $\rho'(0) < \pi$. Par conséquent le chemin $e^{2\rho'(0)Jt}$ a un seul croisement en $t = 0$ avec forme d'intersection de signature $2n$. On obtient

$$(1.19) \quad i_{RS}(z \equiv 0) = n.$$

Regardons maintenant une sphère $S_l = \{z : \rho'(|z|^2) = l\pi\}$, $1 \leq l \leq k$. Considérons la décomposition symplectique J -invariante de $T_z\mathbb{R}^{2n}$, $z \in S_l$ donnée par

$$T_z\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}\langle \frac{1}{2l\pi|z|^2}z \rangle \oplus \mathbb{R}\langle 2l\pi Jz \rangle \oplus \xi_z,$$

où ξ est la distribution de contact sur S_l . La matrice de $d\varphi_t$ s'écrit par rapport à cette décomposition comme

$$d\varphi_t(z) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\rho''}{t\pi} \cdot t & 1 \end{pmatrix} \\ d\varphi_t|_{\xi_z} \end{array} \right)$$

et, comme $d\varphi_t(z)|_{T_z S_l} = e^{2l\pi Jt}$, on peut encore écrire dans la trivialisation canonique de $T\mathbb{R}^{2n}$:

$$d\varphi_t(z) = \chi(t) \circ \Psi(t) ,$$

avec $\Psi(t) = e^{2l\pi Jt}$ et

$$\chi(t) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2\rho''}{t\pi} \cdot t & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Id}_{2n-2} \end{array} \right)$$

L'homotopie (cf. [CFHW2])

$$K(s, t) = \begin{cases} \chi(st)\Psi(\frac{2t}{s+1}), & t \leq \frac{s+1}{2} \\ \chi((s+2)t - (s+1))\Psi(1), & \frac{s+1}{2} \leq t \end{cases}$$

relie avec extrémités fixées $\chi(t)\Psi(t)$ à la concaténation de $\Psi(t)$ et $\chi(t)\Psi(1)$. On obtient

$$i_{RS}(d\varphi_t(z)) = i_{RS}(\chi(t)\Psi(1)) + i_{RS}(\Psi(t)) = \frac{1}{2} + 2ln ,$$

ou encore

$$(1.20) \quad i_{RS}(S_l) = \frac{1}{2} + 2ln .$$

Une fois que nous avons calculé les indices avant perturbation, nous pouvons passer à la description de celle-ci. Par un changement de variable *dépendant du temps* similaire à [CFHW2], p. 34 on peut supposer que

$$X_{H_t} \equiv 0 \quad \text{sur} \quad S_l .$$

Choisissons une fonction de Morse avec exactement deux points critiques $h : S_l \rightarrow \mathbb{R}$. Posons $H_\delta = H + \delta h$, $\delta > 0$. On peut montrer par un argument similaire à [CFHW2] que X_{H_δ} a uniquement deux orbites périodiques (constantes) au voisinage de S_l , correspondant aux deux points critiques de h . Soient $\Psi(t)$ le flot linéarisé de $-X_H$, $\Phi_\delta(t)$ le flot linéarisé de $-X_{\delta h}$, $\Psi_\delta(t)$ le flot linéarisé de $-X_{H_\delta}$. Pour δ petit les chemins $\Psi_\delta(t)$ et $\Psi(t)\Phi_\delta(t)$ sont homotopes à extrémités dans $\text{Sp}_0(2n, \mathbb{R})$, le sous-ensemble des matrices symplectiques à valeurs propres différentes de 1. L'homotopie est donnée par $L(s, t) = \Psi_{s\delta}(t)\Phi_{(1-s)\delta}(t)$. Le même argument que ci-dessus montre alors

$$i_{RS}(\Psi_\delta) = i_{RS}(\Psi) + i_{RS}(\Psi(1)\Phi_\delta) .$$

Or $i_{RS}(\Psi) = \frac{1}{2} + 2ln$ par les calculs précédents. Il suffit donc de connaître l'indice de $M(t) = \Psi(1)\Phi_\delta(t)$. Utilisons la définition: $i_{RS}(M(t)) = \mu(\text{gr } M(t), \Delta)$, où μ est l'indice de Maslov du chemin lagrangien $\Lambda(t) = \text{gr } M(t)$ dans $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, (-\omega_{\text{std}}) \oplus \omega_{\text{std}})$ par rapport à la diagonale Δ . On peut étendre h à \tilde{h} au voisinage de S_l par la relation $\tilde{h}(z, S) = h(z)$, où $(z, S) \mapsto Sz$ est une paramétrisation d'un voisinage de S_l par $S_l \times [1-\epsilon, 1+\epsilon]$. Alors $-X_{\delta h}(z) = \delta J \nabla \tilde{h}(z) = \delta J \nabla h(z)$,

$z \in S_l$ et la linéarisation du flot au point critique $z_0 \in S_l$ est solution de l'équation différentielle $\dot{A}(t) = D(-X_{\delta h}(z_0)) \cdot A(t)$, $A(0) = \text{Id}_{2n}$. Cela implique

$$d\varphi_t^{-X_{\delta h}}(z_0) = e^{\delta t J \nabla^2 \tilde{h}(z_0)}.$$

Mais il est facile de voir que $\nabla^2 \tilde{h}(z_0) = \begin{pmatrix} \nabla^2 h(z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la décomposition $T_{z_0} \mathbb{R}^{2n} = T_{z_0} S_l \oplus \mathbb{R}\langle z_0 \rangle$. Cela entraîne tout de suite que $\Lambda(t) \cap \Delta = \{0\}$ pour $t > 0$ et on se ramène au calcul de la forme d'intersection en $t = 0$. On a

$$\Lambda(0) \cap \Delta = \{(X, X) : X = \Psi(1)X\} = \{(X, X) : X \in T_{z_0} S_l\}.$$

Soit $W = \{(X, -\Psi(1)X) : X \in \mathbb{R}^{2n}\}$ supplémentaire lagrangien de $\Lambda(0)$. Pour t proche de 0, $\Lambda(t)$ est le graphe d'une application linéaire $(l(t), -\Psi(1)l(t)) : \Lambda(0) \rightarrow W$. Alors $l(t)$ vérifie $(X, \Psi(1)X) + (l(t)X, -\Psi(1)l(t)X) = (Y, M(t)Y)$. Soit $\hat{X} = (X, X) \in \Lambda(0) \cap \Delta$ fixé. On définit $\hat{w}(t) = (w(t), -\Psi(1)w(t))$ par $w(t) = l(t)X$, ou encore $M(t)(X + w(t)) = \Psi(1)X - \Psi(1)w(t) = X - \Psi(1)w(t)$ (nous utilisons $\Psi(1) = \text{Id}$ sur TS_l). En dérivant en $t = 0$ on obtient $\dot{w}(0) = \frac{\delta}{2} J(\nabla^2 \tilde{h}(z_0)) \cdot X$. Par définition, la forme d'intersection agit sur $\Lambda(0) \cap \Delta$ comme

$$\Gamma(\hat{X}, \hat{X}) = ((-\omega) \oplus \omega)(\hat{X}, \dot{\hat{w}}(0))$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \Gamma(\hat{X}, \hat{X}) &= ((-\omega) \oplus \omega)((X, X), (\frac{\delta}{2} J(\nabla^2 \tilde{h})X, -\frac{\delta}{2} \Psi(1)J(\nabla^2 \tilde{h})X)) \\ &= -\delta\omega(X, J(\nabla^2 \tilde{h})X) = -\delta\langle X, \nabla^2 \tilde{h} \cdot X \rangle \end{aligned}$$

La signature de Γ est par conséquent égale à $-(2n-1)$ au point critique d'indice 0, respectivement égale à $2n-1$ au point critique d'indice $2n-1$. Cela signifie $i_{RS}(\Psi(1)\Phi_\delta(t)) = \pm(n - \frac{1}{2})$ et

$$i_{RS}(d\varphi_t^{-X_{H_\delta}}(z_0)) = \begin{cases} 2ln - n + 1, & \text{ind}_{\text{Morse}}(z_0) = 0 \\ 2ln + n, & \text{ind}_{\text{Morse}}(z_0) = 2n - 1 \end{cases}$$

La situation peut alors être résumée de la façon suivante: pour $k\pi < \lambda < (k+1)\pi$ le hamiltonien H_λ admet une orbite constante $z \equiv 0$ d'indice n et k variétés d'orbites périodiques paramétrées par \mathbb{S}^{2n-1} , d'indices $2ln + \frac{1}{2}$, $1 \leq l \leq k$. Après perturbation, chaque telle variété produit deux orbites non dégénérées d'indices $2ln - n + 1$ et $2ln + n$. L'homologie tronquée $FH_{(-\infty, b]}^*(H_\lambda)$, $b > \lambda$ a été calculée plus haut et elle est non triviale uniquement en degré $n + 2kn$, où elle vaut \mathbb{Z} . On déduit les flèches du complexe de Floer perturbé comme indiqué dans le diagramme ci-dessous, où la deuxième ligne désigne le degré dans le complexe de Floer, donné par l'opposé de l'indice de Conley-Zehnder (comparer avec [FW1]):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \xleftarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\text{Id}} & \mathbb{Z} \\ n & & n+1 & & 3n & & 3n+1 & & (2k-1)n & & (2k-1)n+1 & & (2k+1)n \end{array}$$

Cela permet aussi de retrouver les valeurs des groupes d'homologie de Floer tronqués $FH_{[a, b]}^*(D^{2n})$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ arbitraires, comme dans [FW1].

1.2 Hamiltoniens asymptotiquement linéaires

Comme annoncé dans la section précédente, nous définissons des groupes d'homologie de Floer pour des variétés à bord de type contact à l'aide d'une classe de hamiltoniens admissibles strictement plus large que celle de [V2]. Notre définition s'inspire du cadre des hamiltoniens asymptotiquement quadratiques de [FH1]. La section 1.2.1 établit les définitions nouvelles et leur relation avec les travaux déjà présents dans la littérature. Dans la section 1.2.2 je démontre l'existence de bornes C^0 a priori pour les espaces de trajectoires correspondant à des hamiltoniens asymptotiquement linéaires et à des homotopies vérifiant certaines conditions de croissance à l'infini. Dans la section 1.2.3 je définis les groupes d'homologie de Floer, isomorphes à ceux définis par C. Viterbo [V2] mais désormais plus flexibles grâce à l'extension préalable de la classe des hamiltoniens admissibles.

1.2.1 Contexte

Interprétons d'abord la définition des hamiltoniens asymptotiquement quadratiques en regardant \mathbb{C}^n comme complété symplectique de $B^{2n}(1)$. La forme de Liouville, la forme symplectique et le champ de Liouville dans \mathbb{C}^n sont, respectivement :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k dy_k - y_k dx_k , \\ \omega_0 &= d\lambda_0 = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \stackrel{\text{not.}}{=} dx \wedge dy , \\ X(z) &= \frac{1}{2}z, \quad \text{tel que } \iota_X \omega_0 = \lambda_0 .\end{aligned}$$

Le flot de Liouville est $\varphi_X^t(z) = e^{t/2} \cdot z$ et la coordonnée $S(z)$ vérifie $z = \varphi_X^{\ln S(z)}(z')$, $z' \in \mathbb{S}^{2n-1}(1)$ convenablement choisi. Cela signifie $z = \sqrt{S(z)} \cdot z'$ ou encore $S(z) = |z|^2$. On a donc un symplectomorphisme

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{S}^{2n-1}(1) \times [1, \infty[&\longrightarrow \{z : |z| \geq 1\} , \\ \Psi(z', S) &= \sqrt{S} \cdot z', \quad \Psi^* \omega_0|_{(z', S)} = d(S\lambda_0) .\end{aligned}$$

Le champ de Reeb sur $\mathbb{S}^{2n-1}(1)$ est $X_{\text{Reeb}}(z') = 2J_0 z'$, alors que sur $\mathbb{S}^{2n-1}(1) \times \{S\}$ il s'écrit $X_{\text{Reeb}}(z', S) = 1/S X_{\text{Reeb}}(z')$. Ici J_0 désigne la structure complexe standard sur \mathbb{C}^n donnée par la multiplication avec i . La structure presque complexe induite par Ψ sur $\mathbb{S}^{2n-1}(1) \times [1, \infty[$ vérifie $\Psi_* J = J_0 \Psi_*$. On note ξ la distribution de contact sur $\mathbb{S}^{2n-1}(1)$ et, pour $v_\xi \in \xi$ un vecteur arbitraire, on calcule

$$\begin{aligned}J_{(z', S)} \frac{\partial}{\partial S} &= \Psi_*^{-1} J_0 \Psi_*|_{(z', S)} \frac{\partial}{\partial S} = \Psi_*^{-1} J_0 \frac{1}{2\sqrt{S}} z' = \Psi_*^{-1} \frac{1}{2\sqrt{S}} i z' \\ &= \frac{1}{2S} i z' = \frac{1}{4S} X_{\text{Reeb}}(z') = \frac{1}{4} X_{\text{Reeb}}(z', S) \\ J_{(z', S)} X_{\text{Reeb}}(z') &= J_{(z', S)} S X_{\text{Reeb}}(z', S) = -4S \frac{\partial}{\partial S} \\ J_{(z', S)} v_\xi &= \Psi_*^{-1} J_0 \sqrt{S} v_\xi = \Psi_*^{-1} \sqrt{S} J_0 v_\xi = J_0 v_\xi\end{aligned}$$

Si g_J désigne la métrique $d(S\lambda_0|)(\cdot, J\cdot)$ sur $\mathbb{S}^{2n-1}(1) \times [1, \infty[$ alors Ψ devient une isométrie. La condition principale vérifiée par les hamiltoniens asymptotiquement quadratiques de [FH1] était $|H'(t, u) - Au|/|u| \rightarrow 0, |u| \rightarrow \infty$, avec A une matrice symétrique définie positive. On peut écrire $Au = \nabla_u(Q)$ avec Q une forme quadratique sur \mathbb{R}^{2n} et la condition d'asymptoticité pourra s'écrire encore $|X_H(t, u) - X_Q(u)|/|u| \rightarrow 0, |u| \rightarrow \infty$ ou bien, tenant compte du fait que Ψ est un symplectomorphisme et une isométrie pour la métrique g_J :

$$|X_{H \circ \Psi}(t, z', S) - X_{Q \circ \Psi}(z', S)|/\sqrt{S} \rightarrow 0, \quad S \rightarrow \infty,$$

avec $Q \circ \Psi(z', S) = S \cdot Q(z')$. Cela amène à poser les définitions suivantes.

Définition 1.2.1. Soit (Σ, λ) une variété de contact. On note $\xi = \ker \lambda$ la distribution de contact et on munit $\Sigma \times [1, \infty[$ de la forme symplectique $d(S\lambda)$. Une structure presque complexe J sur la complétion symplectique $(\Sigma \times [1, \infty[, d(S\lambda))$ est dite standard si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} J_{(x,S)}\left(\frac{\partial}{\partial S}\right) &= \frac{1}{S}X_{\text{Reeb}}(x), \\ J_{(x,S)}(X_{\text{Reeb}}(x)) &= -S\frac{\partial}{\partial S}, \\ J_{(x,S)}|_{\xi} &= J_0, \end{aligned}$$

où J_0 est une structure presque complexe compatible avec $d\lambda$ sur ξ . On appellera métrique conique sur $\Sigma \times [1, +\infty[$ la métrique associée à une telle structure presque complexe.

Une métrique conique satisfait à la relation d'homogénéité suivante :

$$(1.21) \quad \left|v + a\frac{\partial}{\partial S}\right|_{(x,S)}^2 = S \left|v + \frac{a}{S}\frac{\partial}{\partial S}\right|_{(x,1)}^2, \quad v \in T_x\Sigma, \quad a \in \mathbb{R}$$

La définition qui suit nous sera utile pour accentuer le fait que l'homologie de Floer non tronquée par l'action est en fait un invariant de variété symplectique non compacte plutôt que de variété compacte avec bord. Des définitions très similaires sont déjà apparues dans [EG, L2].

Définition 1.2.2. Une variété symplectique (\widehat{M}, ω) est dite admissible si elle satisfait aux conditions suivantes :

- il existe un champ de Liouville défini en dehors d'un compact et complet en temps positif, noté η ;
- il existe une hypersurface compacte Σ transverse à η telle que
 - $\widehat{M} \setminus \Sigma$ admet au moins deux composantes connexes dont exactement une est relativement compacte, notée M ;
 - l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma \times [1^-, +\infty[&\longrightarrow \widehat{M} \\ (x, S) &\longmapsto \varphi_{\ln S} x \end{aligned}$$

est bien définie et induit un symplectomorphisme entre $(\Sigma \times [1, +\infty[, d(S\lambda))$ et $(\widehat{M} \setminus M, \omega)$. Ici 1^- est réel positif plus petit que 1, le flot de η est noté φ et $\lambda = \iota_\eta \omega$ est la forme de Liouville.

Remarquons le fait qu'une variété est admissible si et seulement si elle est symplectomorphe à la complétée au sens de 1.1.3 d'une variété symplectique à bord de type contact. Toute autre hypersurface Σ' satisfaisant aux conditions précédentes est nécessairement de la forme

$$\Sigma' = \Psi(\text{graph } h : \Sigma \longrightarrow]0, +\infty[)$$

$$\frac{|X_{\tilde{H}}(t, x, S) - X_F(x, S)|}{\sqrt{S}} \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$$

La définition ne dépend pas du choix de Σ . En effet, soit $\Sigma' = \text{graph}(h : \Sigma \rightarrow]0, +\infty[) \subset \Sigma \times]0, +\infty[$ une autre hypersurface, qui détermine une paramétrisation

$$\begin{aligned} \Psi' : \Sigma' \times [1, +\infty[&\longrightarrow \Sigma \times (0, +\infty) \setminus \text{int } \Sigma' \\ (x, h(x)), S' &\longmapsto (x, S'h(x)) \end{aligned}$$

Remarquons d'ailleurs que les orbites 1-périodiques du hamiltonien $F(x, S) = Sf(x)$ qui sont situées suffisamment loin de $\Sigma \times \{1\}$ dans $\Sigma \times [1, +\infty[$ sont en correspondance avec les caractéristiques d'action égale à 1 sur l'hypersurface $\Sigma' = \text{graph}(\frac{1}{f} : \Sigma \longrightarrow]0, +\infty[)$. La propriété d'avoir des caractéristiques d'action égale à 1 est maigre dans la topologie C^∞ sur les hypersurfaces [T] et on déduit que le champ hamiltonien X_F n'a pas de telles orbites périodiques pour un choix générique de la fonction $f : \Sigma \longrightarrow]0, \infty[$.

Une dernière remarque: avec notre définition, les hamiltoniens asymptotiquement linéaires dans \mathbb{C}^n sont les hamiltoniens qui sont asymptotiquement quadratiques au sens usuel [FH1]!

1.2.2 Bornes C^0

Comme mentionné plus haut, la bonne définition des groupes d'homologie de Floer dépend de l'existence de bornes C^0 valables a priori pour les solutions $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \widehat{M}$ de l'équation

$$(1.22) \quad u_s + \hat{J}(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) = 0,$$

$$(1.23) \quad -\infty < \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)), \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)) < +\infty$$

avec $H(s, t, u)$, $\hat{J}(s, t, u)$ une homotopie de hamiltoniens et structures presque complexes qui vérifient certaines conditions spéciales que nous explicitons tout de suite. Les conditions

auxquelles doivent satisfaire H et \widehat{J} , ainsi que les preuves des estimations C^0 , sont adaptées d'après [FH1]. Dans la preuve finale du théorème 1.2.5 j'utilise une astuce analytique tirée de [CFH2].

Pour fixer les notations, un point $u \in \widehat{M}$ qui appartient à $\Sigma \times [1, \infty[$ sera noté $u = (\bar{u}, S)$.

Nous demandons que \widehat{J} soit, pour chaque (s, t) , une structure presque complexe compatible avec ω qui vérifie :

$$(1.24) \quad \text{Il existe } R \geq 1 \text{ tel que } \widehat{J}(s, t, \bar{u}, S) = J_{\text{std}}(\bar{u}, S), \quad S \geq R ,$$

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \text{Il existe } s_0 > 0 \text{ tel que } \widehat{J}(s, t, u) &= J(t, u), & s \leq -s_0 , \\ \widehat{J}(s, t, u) &= \widetilde{J}(t, u), & s \geq s_0 , \end{aligned}$$

où J_{std} désigne une structure standard.

Les conditions qu'on impose sur $H(s, t, u)$ sont les suivantes.

$$(1.26) \quad \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u) \geq 0 ,$$

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \text{Il existe } s_0 > 0 \text{ tel que } H(s, t, u) &= H(t, u), & s \leq -s_0 , \\ H(s, t, u) &= K(t, u), & s \geq s_0 , \end{aligned}$$

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \text{Il existe } f(s, \bar{u}) : \mathbb{R} \times \Sigma \longrightarrow]0, \infty[\text{ telle que } F(s, \bar{u}, S) &= Sf(s, \bar{u}) \text{ vérifie} \\ |X_{H(s)} - X_{F(s)}|_{J_{\text{std}}} / \sqrt{S} &\longrightarrow 0, \quad S \longrightarrow \infty , \\ |\nabla_s X_{H(s)} - \nabla_s X_{F(s)}|_{J_{\text{std}}} / \sqrt{S} &\longrightarrow 0, \quad S \longrightarrow \infty , \\ \text{uniformément en } s, t \text{ et } \bar{u} , \end{aligned}$$

$$(1.29) \quad |\nabla_t X_{H(s)}(s, t, \bar{u}, S)|_{J_{\text{std}}} \leq c(1 + \sqrt{S}) ,$$

$$(1.30) \quad |H''(s, t, \bar{u}, S) \cdot X|_{J_{\text{std}}} \leq c|X|_{J_{\text{std}}}, \quad X \in T_{(\bar{u}, S)}(\Sigma \times [1, \infty[) .$$

La fonction $f(s, \bar{u})$ est soumise aux conditions suivantes:

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \text{Il existe } s_0 > 0 \text{ tel que } f(s, \bar{u}) &= f^-(\bar{u}), & s \leq -s_0 , \\ f(s, \bar{u}) &= f^+(\bar{u}), & s \geq s_0 . \end{aligned}$$

$$(1.32) \quad \begin{aligned} \text{En posant } F^-(\bar{u}, S) &= Sf^-(\bar{u}) \text{ et } F^+(\bar{u}, S) = Sf^+(\bar{u}), \\ \text{les champs } X_{F^-} \text{ et } X_{F^+} \text{ n'ont pas d'orbites de période } 1 &\text{ passant par des} \\ \text{points de coordonnée } S \text{ suffisamment grande.} \end{aligned}$$

$$(1.33) \quad \frac{\partial f}{\partial s}(s, \bar{u}) \geq 0 .$$

$$(1.34) \quad \text{Si } X_{F(\widehat{s})} \text{ a une orbite périodique pour } S \text{ grand, alors } \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{s=\widehat{s}} \geq \epsilon(\widehat{s}) > 0 .$$

On étend la fonction S (canoniquement définie sur $\Sigma \times [1, \infty[$) à une fonction sur \widehat{M} telle que $S \leq 1$ sur M et \sqrt{S} soit lisse. Nous dénoterons aussi

$$H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \widehat{M}) = \{x \in L^2(\mathbb{S}^1, \widehat{M}) : \|\sqrt{S} \circ x\|_{L^2} < \infty, \dot{x} \in L^2(x^* T\widehat{M})\} ,$$

la métrique sur \widehat{M} étant prise par rapport à une structure presque complexe standard sur $\Sigma \times [1, \infty[$. En pratique on pourra penser à des fonctions continues, grâce à l'injection compacte $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \widehat{M}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \widehat{M})$ que nous démontrerons plus bas. Introduisons aussi les notations suivantes, selon [FH1].

Soit $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Soit $\delta > 0$. On note Γ_δ l'ensemble de toutes les suites $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telles que

$$(1.35) \quad \begin{aligned} 0 < s_{k+1} - s_k &\leq \delta, \quad k \in \mathbb{Z} \\ s_k &\longrightarrow \pm\infty, \quad k \longrightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Pour $s = (s_k) \in \Gamma_\delta$ on définit

$$[\alpha]^s := \sup\{\alpha(s_k, t) : k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{S}^1\}.$$

On pose

$$[\alpha]_\delta := \inf\{[\alpha]^s : s \in \Gamma_\delta\}.$$

Proposition 1.2.4. ([FH1], Prop. 8) *Soient $a, b, \lambda \geq 0$ des constantes réelles et $\delta > 0$ tel que*

$$\delta^2 \lambda < \pi^2.$$

Il existe une constante $C = C(a, b, \lambda, \delta) > 0$ telle que toute fonction qui vérifie

$$-\Delta\alpha - \lambda\alpha \leq a \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1,$$

$$[\alpha]_\delta < b,$$

satisfait aussi

$$\sup\{\alpha(s, t) : (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1\} \leq C.$$

C'est dans la preuve de ce résultat qu'intervient le principe du maximum, incontournable dans toutes les versions d'homologie de Floer que nous avons discutées. Cette proposition sera appliquée à la fonction $\alpha = S \circ u$ avec u solution arbitraire de (1.22 - 1.23) pour démontrer que u reste dans le compact $\{S \leq C\}$. Plus précisément, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 1.2.5. (estimation a priori C^0 ; comparer avec [FH1], Thm. 12) *Soient H et \widehat{J} satisfaisant aux conditions (1.24 - 1.34). Il existe une constante $d = d(H, \widehat{J}) > 0$ telle que toute solution de*

$$\begin{aligned} u_s + \widehat{J}(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) &= 0, \\ -\infty < \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)), \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)) &< +\infty \end{aligned}$$

vérifie

$$(1.36) \quad \sup_{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} S \circ u(s, t) \leq d.$$

Nous nous appuyerons sur trois lemmes préparatoires.

Lemme 1.2.6. (cf. [FH1], Lemme 9) Soient H et \widehat{J} satisfaisant aux conditions (1.24 - 1.28) et (1.31 - 1.32). Il existe des constantes réelles $c_1 \leq c_2$ telles que toute solution de

$$u_s + \widehat{J}(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) = 0 ,$$

$$-\infty < \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)), \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)) < +\infty$$

vérifie

$$(1.37) \quad A_{H(s)}u(s) \in [c_1, c_2] .$$

Démonstration. Nous avons déjà calculé

$$\frac{d}{ds} A_{H(s)}u(s) = - \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u(s, t)) dt - \| \nabla A_{H(s)}(u(s)) \|_{s, u(s)}^2 ,$$

avec

$$\| \xi \|_{s, x}^2 = \int_0^1 g_{\widehat{J}}(s, t, x(t))(\xi(t), \xi(t)) dt, \quad x : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \widehat{M}, \quad \xi \in \Gamma(x^* T\widehat{M}) .$$

La croissance de H par rapport à s entraîne que $A_{H(s)}u(s)$ est décroissante et

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} A_{H(s)}u(s) = \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}u(s) ,$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} A_{H(s)}u(s) = \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}u(s) .$$

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \| \nabla A_{H(s)}(u(s)) \|_{s, u(s)}^2 < \infty$ et cela fournit une suite $s_k \longrightarrow \infty$ telle que $\| \nabla A_{H(s_k)}(u(s_k)) \|_{s_k, u(s_k)}^2 \longrightarrow 0$. Par ailleurs, les hypothèses (1.24 - 1.25) entraînent le fait que la norme $\| \xi \|_{s, x}^2$ sur les champs de vecteurs le long des lacets de \widehat{M} est équivalente à la norme L^2 usuelle prise par rapport à une structure presque complexe fixée, compatible avec ω et standard sur $\Sigma \times [1, \infty[$, et ceci uniformément par rapport à s et x . On déduit donc l'existence d'une suite $s_k \longrightarrow \infty$ telle que, en posant $x_k = u(s_k)$, on ait

$$(1.38) \quad \| \nabla A_K(x_k) \|_{L^2} \longrightarrow 0 ,$$

le gradient et la norme étant pris par rapport à une structure presque complexe standard sur $\Sigma \times [1, \infty[$. Un raisonnement similaire est valable en $-\infty$ et fait intervenir ∇A_H .

Posons $S_k = S \circ x_k$. J'affirme qu'il suffit de montrer que $\sqrt{S_k}$ est bornée en norme L^2 pour déduire l'existence de la borne inférieure universelle c_1 . En effet :

- a. $\| \sqrt{S_k} \|_{L^2}$ bornée et $\| \nabla A_K(x_k) \|_{L^2}$ bornée impliquent $\| \dot{x}_k \|_{L^2}$ bornée. En effet, la fonction $F^+(\bar{u}, S) = S \cdot f^+(\bar{u})$ à laquelle K est asymptotique vérifie $|\nabla F^+(\bar{u}, S)|^2 = S|\nabla F^+(\bar{u}, 1)|^2$ et la condition d'asymptoticité implique l'existence d'une constante C_1 telle que $|\nabla K(t, \bar{u}, S)| \leq C_1 \sqrt{S}$, ou encore $|\nabla K(t, u)| \leq C_1 \sqrt{S} + C_2$. On aura :

$$\| \dot{x}_k \|_{L^2} \leq \| \nabla K(t, x_k) \|_{L^2} + \| \nabla A_K(x_k) \|_{L^2} \leq C_2 + C_1 \| \sqrt{S_k} \|_{L^2} + \| \nabla A_K(x_k) \|_{L^2} .$$

Désormais, sauf mention explicite, toutes les normes $\| \cdot \|$ sont entendues au sens L^2 .

- b. $\|\dot{x}_k\|$ bornée entraîne $\|\sqrt{S_k}'\|$ bornée. En effet, là où $S_k(t) \geq 1$, écrivons $x_k(t) = (\bar{x}_k(t), S_k(t))$ et $|\dot{x}_k(t)|^2 = |\dot{\bar{x}}_k(t) + S_k'(t)\frac{\partial}{\partial S}|^2 = S_k(t)|\dot{\bar{x}}_k(t)|_{x_k(t)}^2 + S_k'(t)^2/S_k(t)$. Cela assure $\sqrt{S_k}'^2 \leq 4|\dot{x}_k(t)|^2$. D'un autre côté, là où $S_k(t) \leq 1$ nous avons $\sqrt{S_k}'^2 = [d(\sqrt{S}) \cdot \dot{x}_k(t)]^2 \leq c|\dot{x}_k(t)|^2$ (la norme de $d\sqrt{S}$ est bornée par compacité de M).
- c. On a une "injection compacte" $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \widehat{M}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \widehat{M})$. Soit (y_k) une suite telle que $\|\sqrt{S_k}\|$ et $\|\dot{y}_k\|$ soient bornées, où $S_k = S \circ y_k$. Nous voulons montrer l'existence d'une sous-suite qui converge en norme C^0 . Le point précédent assure que $\|\sqrt{S_k}'\|$ est bornée. L'injection compacte $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ donnée par le théorème d'Arzela-Ascoli fournit une sous-suite de $\sqrt{S_k}$ qui converge uniformément vers une fonction continue $\sqrt{S_0}$. La sous-suite de y_k qui lui correspond prend ses images dans un compact $M_c = \{S \leq c\}$. Le théorème d'Arzela-Ascoli donne à nouveau une injection compacte $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, M_c) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, M_c)$ et on trouve une sous-suite qui converge uniformément vers une limite y . De plus, $S_0 = S \circ y$.
- Quitte à extraire une sous-suite nous pouvons alors supposer que x_k converge uniformément vers une limite continue x .
- d. Le fait que $\|\nabla A_K(x_k)\|_{L^2} \rightarrow 0$ entraîne que x est une orbite de X_K et $x_k \xrightarrow{H^{1,2}} x$. La convergence C^0 de x_k vers x entraîne la convergence comme distributions, y compris de toutes les dérivées. En particulier $\dot{x}_k \rightarrow \dot{x}$ dans \mathcal{D}' . D'un autre côté $X_K(t, x_k)$ converge uniformément vers $X_K(t, x)$ et en particulier en norme L^2 . Cela assure $\dot{x}_k \xrightarrow{L^2} X_K(t, x)$ et la convergence a aussi lieu dans \mathcal{D}' . Par conséquent $\dot{x} = X_K(t, x)$ et $\dot{x}_k \xrightarrow{L^2} \dot{x}$.
- e. Il existe $C = C(K, F^+)$ telle que toute orbite 1-périodique x de X_K satisfait $\|\sqrt{S} \circ x\| \leq C$. Cela découle directement du lemme 1.2.7 en utilisant l'injection compacte $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \widehat{M}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \widehat{M})$. Comme x est une trajectoire de X_K on déduit une borne sur $|\dot{x}|$ et donc une borne sur l'action $A_K(x)$.

Posons

$$c_1 = \inf\{A_K(x) : \dot{x} = X_K(t, x)\} > -\infty$$

et on aura $\inf_s A_{H(s)} u(s) = \lim A_{H(s_k)} u(s_k) \geq c_1$. La constante c_2 est déduite de façon similaire à l'aide d'une suite $s_k \rightarrow -\infty$.

Montrons maintenant que $\|\sqrt{S_k}\|_{L^2}$ est bornée. Raisonnons par l'absurde et supposons, quitte à extraire une sous-suite, que $\lambda_k = \|\sqrt{S_k}\| / \Lambda \rightarrow \infty$, $\lambda_k \geq 1$, où $\Lambda > 0$ est une constante fixée que nous choisirons convenablement plus bas. Posons $v_k(t) = (\bar{x}_k(t), S_k(t)/\lambda_k^2)$ pour $S_k(t) > 0$ et $v_k(t) = x_k(t)$ si $S_k(t) = 0$. Pour facilité nous écrirons sans distinguer $v_k(t) = (\bar{x}_k(t), S_k(t)/\lambda_k^2)$. On note $\tilde{S}_k(t) = S \circ v_k(t)$, avec $\|\sqrt{\tilde{S}_k}\|_{L^2} = \Lambda$, $k \geq 1$.

- a. J'affirme que $\|\dot{v}_k\|_{L^2}$ est borné. En effet, pour $\tilde{S}_k(t) > 0$ nous avons

$$|\dot{v}_k(t)|^2 = |\dot{\bar{x}}_k(t) + \tilde{S}_k'(t)\frac{\partial}{\partial S}|_{(\bar{x}_k(t), \tilde{S}_k(t))}^2 = \frac{1}{\lambda_k^2}|\dot{\bar{x}}_k(t) + \lambda_k^2 \tilde{S}_k'(t)\frac{\partial}{\partial S}|_{(\bar{x}_k(t), \lambda_k^2 \tilde{S}_k(t))}^2 = \frac{1}{\lambda_k^2}|\dot{x}_k(t)|^2,$$

alors que, pour $\tilde{S}_k(t) = 0$, on aura $\dot{v}_k(t) = \dot{x}_k(t)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|\dot{v}_k\|^2 &= \int_{[\tilde{S}_k(t)=0]} |\dot{v}_k(t)|^2 + \int_{[\tilde{S}_k(t)>0]} |\dot{v}_k(t)|^2 \\ &\leq \|\dot{x}_k - X_K(t, x_k)\|^2 + \int_{[\tilde{S}_k(t)=0]} |X_K(t, x_k)|^2 + \left\| \frac{1}{\lambda_k} \dot{x}_k(t) \right\|^2. \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est borné en vue de $\|\nabla A_K(x_k)\| \rightarrow 0$, le deuxième par compacité de M et le troisième en vue de l'inégalité $|\nabla K(t, x_k(t))| \leq c(1 + \sqrt{S_k(t)})$, qui entraîne que $\left\| \frac{1}{\lambda_k} \nabla K(t, x_k) \right\|$ est borné.

- b. Comme plus haut, nous obtenons la convergence uniforme d'une sous-suite de (v_k) vers une limite continue v . J'affirme que v satisfait à l'équation $\dot{v}(t) = X_{F^+}(v(t))$. En premier lieu $\dot{v}_k \rightarrow \dot{v}$ dans \mathcal{D}' . Je montre que \dot{v}_k converge vers $X_{F^+}(v)$ en norme L^2 , ce qui entraînera $\dot{v} = X_{F^+}(v)$ et $\dot{v}_k \xrightarrow{L^2} \dot{v}$.

Montrons d'abord que $\frac{1}{\lambda_k} \|X_K(t, \lambda_k^2 v) - X_{F^+}(\lambda_k^2 v)\|_{L^2} \rightarrow 0$. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Il existe S_ϵ tel que $\frac{1}{\sqrt{S}} |X_K(t, \bar{x}, S) - X_{F^+}(\bar{x}, S)| < \epsilon$, $S \geq S_\epsilon$. Aussi, pour tout $C > 0$ il existe $k(C)$ tel que $\lambda_k^2 \geq CS_\epsilon$, $k \geq k(C)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_k^2} \|X_K(t, \lambda_k^2 v) - X_{F^+}(\lambda_k^2 v)\|^2 &= \frac{1}{\lambda_k^2} \int_{[t: S(v(t))=0]} |X_K(t, v) - X_{F^+}(v)|^2 + \\ &+ \int_{[t: 0 < S(v(t)) < \frac{1}{C}]} \frac{1}{\lambda_k^2} |X_K(t, \lambda_k^2 v) - X_{F^+}(\lambda_k^2 v)|^2 + \int_{[t: S(v(t)) \geq \frac{1}{C}]} \frac{1}{\lambda_k^2} |X_K(t, \lambda_k^2 v) - X_{F^+}(\lambda_k^2 v)|^2. \end{aligned}$$

En effet: le premier terme de la somme est plus petit que ϵ pour k suffisamment grand puisque l'intégrale est bornée par $\sup\{|X_K(t, x) - X_{F^+}(x)| : t \in \mathbb{S}^1, x \in M\}$. Le deuxième terme de la somme est plus petit que ϵ pour $C \geq C_\epsilon$ suffisamment grand, vu que l'intégrand est borné. Le troisième terme est plus petit que ϵ pour $k \geq k(C_\epsilon)$.

Nous avons aussi l'inégalité $|\frac{1}{\lambda_k} X_K(t, \lambda_k^2 v_k) - \frac{1}{\lambda_k} X_K(t, \lambda_k^2 v)| \leq 2|X_K(t, v_k) - X_K(t, v)|$ pour k suffisamment grand. Elle est aisément obtenue en distinguant les différents cas selon $S = 0$ ou $S > 0$. Nous obtenons $\frac{1}{\lambda_k} X_K(t, \lambda_k^2 v_k) - \frac{1}{\lambda_k} X_K(t, \lambda_k^2 v) \xrightarrow{L^2} 0$ et donc

$$(1.39) \quad \frac{1}{\lambda_k} X_K(t, \lambda_k^2 v_k) - \frac{1}{\lambda_k} X_{F^+}(\lambda_k^2 v) \xrightarrow{L^2} 0,$$

ou encore

$$(1.40) \quad \frac{1}{\lambda_k} \frac{d}{dt} \lambda_k^2 v_k - \frac{1}{\lambda_k} X_{F^+}(\lambda_k^2 v) \xrightarrow{L^2} 0.$$

Si nous savions à ce point que $S \circ v > 0$, la preuve de b. serait finie: on aurait $S \circ v_k > 0$ pour k suffisamment grand et donc $\|\dot{v}_k - X_{F^+}(v)\| = \left\| \frac{1}{\lambda_k} \frac{d}{dt} \lambda_k^2 v_k - \frac{1}{\lambda_k} X_{F^+}(\lambda_k^2 v) \right\| \xrightarrow{L^2} 0$.

Soit $\Lambda \geq 1$ tel que $\Lambda^2 \cdot \min f^+ > \max f^+$, où $F^+(\bar{x}, S) = S \cdot f^+(\bar{x})$. J'affirme que $S \circ v > 1$. En effet, il existe t_0 tel que $S(v(t_0)) = \Lambda^2$. Supposons qu'il existe t tel que $S(v(t)) = 1$ et soit t_1 le plus petit tel t avec $S \circ v > 1$ sur $[t_0, t_1[$ et $S(v(t_1)) = 1$. Le même raisonnement que plus haut fonctionne en travaillant sur $L^2[t - \delta, t + \delta]$ et montre que $\dot{v} = X_{F^+}(v)$ sur cet intervalle. En particulier, l'image de $[t_0, t_1]$ par v est située sur le niveau $\Lambda^2 f^+(v(t_0)) > \max f^+$ de F^+ . En particulier $S(v(t_1)) f^+(v(t_1)) > \max f^+$, ce qui signifie $S(v(t_1)) > 1$. Cela est une contradiction et l'assertion est prouvée.

- c. L'argument précédent montre que, pour Λ suffisamment grand, la solution v de l'équation $\dot{v} = X_{F^+}(v)$ satisfait $S \circ v > 1$. Elle vit donc sur un niveau de F^+ où les orbites périodiques sont en correspondance avec les caractéristiques de longueur 1 sur le graphe de $1/f^+$. Mais l'hypothèse (1.32) empêche l'existence de telles caractéristiques. Cela prouve le fait que $\|\sqrt{S_k}\|_{L^2}$ est bornée et achève la démonstration du lemme 1.2.6.

□

Lemme 1.2.7. (cf, [FH1], Lemme 10) *Soient H et \hat{J} satisfaisant aux conditions (1.24 - 1.28) et (1.31 - 1.32). Pour toute constante $c > 0$ il existe une constante $d > 0$ telle que*

$$(1.41) \quad \|\nabla A_{H(s)}(x)\|_{g_{J(s)}}^2 + \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, x(t)) dt \leq c$$

pour un certain $s \in \mathbb{R}$ et $x \in H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \widehat{M})$ entraîne

$$(1.42) \quad \|x\|_{H^{1,2}} \leq d$$

Démonstration. Comme dans la preuve précédente, le comportement asymptotique de \hat{J} permet de remplacer la norme $\|\cdot\|_{s,x}$ sur les champs de vecteurs le long d'un lacet x par la norme L^2 usuelle, alors que le gradient par rapport à la métrique $g_{\hat{J}(s)}$ peut être remplacé par le gradient usuel par rapport à une métrique associée à une structure presque complexe standard. Montrons alors que l'hypothèse

$$\|\nabla A_{H(s)}(x)\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, x(t)) dt < c$$

implique $\|\sqrt{S \circ x}\|_{L^2} < d$, $\|\dot{x}\|_{L^2} < d$ où $d = d(c)$. De plus, nous avons vu plus haut qu'il suffit de montrer que $\|\sqrt{S \circ x}\|$ est borné, puisque $\|\nabla A_{H(s)}(x)\|$ est borné. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite (s_k, x_k) telle que

$$\|\sqrt{S \circ x_k}\| \rightarrow \infty,$$

$$\|\nabla A_{H(s_k)}(x_k)\| \leq c, \quad \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s_k, t, x_k(t)) dt \leq c.$$

Comme $H(s)$ est constant pour $s \leq -s_0$ ou $s \geq s_0$, nous pouvons supposer après extraction éventuelle d'une sous-suite que $s_k \rightarrow \hat{s}$. Posons $S_k = S \circ x_k$ et $\lambda_k = \|\sqrt{S_k}\|/\Lambda$, avec $\Lambda \geq 1$ une constante qui sera convenablement choisie plus bas. Avec le même abus de notation que dans le lemme précédent on pose $v_k(t) = (\bar{x}_k(t), S_k(t)/\lambda_k^2)$ et, pareillement, on trouve une sous-suite extraite notée encore v_k qui converge uniformément vers une limite continue v .

J'affirme que v satisfait l'équation $\dot{v} = X_{F(\hat{s})}(t, v)$ si Λ est suffisamment grand. La preuve est parfaitement similaire à celle du lemme précédent, avec la seule observation que, dans le passage de (1.39) à (1.40), nous utilisons juste le fait que $\|\nabla A(x_k)\|$ est borné et non qu'il tend vers zéro. Le rôle de F^+ sera maintenant joué par $F(\hat{s})$. De plus, pour Λ suffisamment grand, l'image de v est contenue dans $\Sigma \times [1, \infty[$ et on pourra écrire $v(t) = (\bar{x}(t), S(t))$.

L'hypothèse (1.34) assure l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $\frac{\partial f}{\partial s}(\hat{s}, \bar{x}) \geq \epsilon$. D'un autre côté, afin d'exploiter l'hypothèse $\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s} dt \leq c$, calculons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, \bar{x}, S) &= \int_{0,1} \frac{d}{d\gamma} \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, \bar{x}, \gamma S + 1 - \gamma) d\gamma + \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, \bar{x}, 1) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial S}(s, t, \bar{x}, \gamma S + 1 - \gamma) \cdot (S - 1) d\gamma + \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, \bar{x}, 1) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s \partial S}(s, t, \bar{x}, \gamma S + 1 - \gamma) - \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial S}(s, t, \bar{x}, \gamma S + 1 - \gamma) \right) \cdot (S - 1) d\gamma \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, \bar{x}, 1) + \frac{\partial f}{\partial s}(s, \bar{x}) \cdot (S - 1) . \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial S} = \frac{\partial f}{\partial s}$. En lisant la deuxième condition de (1.28) sur la composante $\partial/\partial S$ du gradient on obtient

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial S}(s, t, \bar{x}, S) - \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial S}(s, \bar{x}, S) \right| \longrightarrow 0$$

avec convergence uniforme en s, t et \bar{x} . Cela implique, pour tout $\tau > 0$, l'existence d'une constante c_τ telle que

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial S}(s, t, \bar{x}, S) - \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial S}(s, \bar{x}, S) \right| \leq \tau + \frac{c_\tau}{\sqrt{S}} .$$

Pour k suffisamment grand nous obtenons (avec s_k proche de \hat{s}):

$$\begin{aligned} c &\geq \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s_k, t, \bar{x}_k(t), S_k(t)) dt \\ &\geq -\frac{\tau}{2} \|\sqrt{S_k}\|_{L^2}^2 - c_\tau \|\sqrt{S_k}\|_{L^1} - C + \frac{\epsilon}{2} \|\sqrt{S_k}\|_{L^2}^2 - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Or $\|\sqrt{S_k}\|_{L^1} \leq \|\sqrt{S_k}\|_{L^2}$. Alors, pour $\tau < \epsilon$, le membre de droite tend vers $+\infty$ avec k en vue de la supposition $\|\sqrt{S_k}\|_{L^2} \longrightarrow \infty$. On a une contradiction et le lemme 1.2.7 est démontré. \square

Lemme 1.2.8. (cf. [FH1], Proposition 11) *Soient H et \hat{J} satisfaisant aux conditions (1.24 - 1.28) et (1.31 - 1.32). Pour tout $\delta > 0$ il existe une constante $c_\delta > 0$ telle que toute solution de*

$$\begin{aligned} u_s + \hat{J}(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) &= 0 , \\ -\infty &< \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)), \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)) < +\infty \end{aligned}$$

vérifie

$$(1.43) \quad [\sqrt{S \circ u}]_\delta \leq c_\delta .$$

Démonstration. Soit $u(s, t)$ une telle solution. Le lemme 1.2.6 assure l'existence de constantes $c_1 < c_2$ telle que $A_{H(s)}u(s) \in [c_1, c_2]$, $s \in \mathbb{R}$. Posons $\bar{c} = c_2 - c_1$. On déduit que, pour tous $a < b$, on a

$$(1.44) \quad \int_a^b \left(\|\nabla A_{H(s)}(u(s))\|_{s, u(s)}^2 + \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s, t, u(s, t)) dt \right) ds = A_{H(a)}u(a) - A_{H(b)}u(b) \leq \bar{c} .$$

Posons $\widehat{s}_k = k\delta/4$, $\tau = \delta/16$. La relation (1.44) appliquée à $a = \widehat{s}_k - \tau$, $b = \widehat{s}_k + \tau$ entraîne l'existence de réels $s_k \in [\widehat{s}_k - \tau, \widehat{s}_k + \tau]$ tels que $x_k = u(s_k)$ vérifie

$$\| \nabla A_{H(s_k)}(x_k) \|_{s_k, u(s_k)}^2 + \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s_k, t, x_k(t)) dt \leq \bar{c} \cdot 8/\delta .$$

Le lemme 1.2.7 implique l'existence d'une constante $d(\delta)$ telle que $\| \sqrt{S \circ x_k} \| < d(\delta)$ et $\| \dot{x}_k \| < d(\delta)$. Comme $\| \dot{x}_k \|$ est borné on déduit que $\| \sqrt{S \circ x_k}' \|$ est borné et l'injection compacte $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ entraîne l'existence d'une constante c_δ telle que $\| \sqrt{S \circ x_k} \|_{C^0} \leq c_\delta$. Par ailleurs, avec la notation (1.35) on voit que $(s_k) \in \Gamma_\delta$. En effet, $s_k \longrightarrow \pm\infty$, $k \longrightarrow \pm\infty$ et

$$\frac{\delta}{8} \leq s_{k+1} - s_k \leq \frac{2\delta}{4} + \frac{\delta}{16} - \left(\frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{16}\right) = \frac{6\delta}{16} .$$

Par conséquent $[\sqrt{S \circ u}]_\delta \leq c_\delta$. □

Démonstration du théorème 1.2.5. Posons $\alpha(s, t) = S \circ u(s, t)$. Par le lemme 1.2.8 la fonction α vérifie déjà $[\alpha]_\delta \leq (c_\delta)^2$. Je montre ci-dessous qu'elle satisfait à une inéquation elliptique

$$\Delta\alpha \geq -A - B\alpha ,$$

avec A, B des constantes positives dépendant uniquement de H et \widehat{J} et pas de u . Il suffira alors de choisir δ tel que $\delta^2 B < \pi^2$ pour que le lemme 1.2.4 fournisse une borne C^0 pour α .

J'exprimerai de façon convenable $\Delta\alpha$ en utilisant notamment dans (1.45) une astuce calculatoire tirée de [CFH2] pour mettre en évidence un terme du type $|u_s|^2 + |u_t|^2$. Soit $R \geq 1$ tel que $\widehat{J}(s, t, \bar{u}, S) = J(\bar{u}, S)$ est standard et indépendante de s et t pour $S \geq R^2$. Sur $\Gamma = \{(s, t) : \alpha(s, t) \geq R^2\}$ on a $dS \circ J = -S\lambda$ et on peut écrire:

$$\begin{aligned} \alpha_s(s, t) &= dS \cdot u_s(s, t) = dS \cdot (-Ju_t + H'(s, t, u)) \\ &= S(u(s, t))\lambda(u_t) + dS \cdot H'(s, t, u) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_t(s, t) &= dS \cdot u_t(s, t) = dS \cdot (Ju_s - JH'(s, t, u)) \\ &= -S(u(s, t))\lambda(u_s) + S\lambda(H'(s, t, u)) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.45) \quad & \partial_s(S(u(s, t))\lambda(u_t)) - \partial_t(S(u(s, t))\lambda(u_s)) \\ &= u_s((S\lambda)(u_t)) - u_t((S\lambda)(u_s)) \\ &= d(S\lambda)(u_s, u_t) + (S\lambda)([u_s, u_t]) \\ &= d(S\lambda)(u_s, u_t) = \omega(u_s, u_t) = \frac{1}{2}\omega(u_s, u_t) + \frac{1}{2}\omega(u_s, u_t) \\ &= \frac{1}{2}\omega(u_s, Ju_s - JH') - \frac{1}{2}\omega(u_t, -Ju_t + H') \\ &= \frac{1}{2}(|u_s|^2 + |u_t|^2) - \frac{1}{2}\omega(u_s, JH') - \frac{1}{2}\omega(u_t, H') . \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{1}{2}(|u_s|^2 + |u_t|^2) - \frac{1}{2}\omega(u_s, JH') - \frac{1}{2}\omega(u_t, H') + dS \cdot \partial_s H'(s, t, u) \\ &\quad + dS \cdot (H''(s, t, u) \cdot u_s) + (dS \cdot u_t) \cdot \lambda(H'(s, t, u)) + S\lambda(\partial_t H'(s, t, u)) + S\lambda(H''(s, t, u) \cdot u_t) . \end{aligned}$$

Evaluons maintenant les termes qui composent le membre de droite de l'égalité précédente. La première propriété de (1.28) entraîne

$$|\omega(u_s, JH')| \leq |u_s| \cdot |H'| \leq c_1(1 + \sqrt{\alpha})|u_s| ,$$

$$\omega(u_t, H') \leq |u_t| \cdot |H'| \leq c_1(1 + \sqrt{\alpha})|u_t| .$$

La norme de $dS(\bar{u}, S)$ en tant qu'application linéaire est bornée par \sqrt{S} et la deuxième propriété de (1.28) entraîne

$$|dS \cdot \partial_s H'(s, t, u)| \leq c_2(1 + \sqrt{\alpha})^2 .$$

La norme de $\lambda(\bar{u}, S)$ en tant qu'application linéaire est bornée par $1/\sqrt{S}$. On obtient alors $|\lambda(H')| \leq c_3$ et

$$|(dS \cdot u_t) \cdot \lambda(H'(s, t, u))| \leq c_1 c_3 (1 + \sqrt{\alpha})|u_t| .$$

La norme d'application linéaire de $S\lambda(\bar{u}, S)$ est bornée par \sqrt{S} et la propriété (1.29) entraîne

$$|S\lambda(\partial_t H'(s, t, u))| \leq c_4(1 + \alpha) ,$$

alors que (1.30) donne

$$|S\lambda(H''(s, t, u) \cdot u_t)| \leq c_5(1 + \sqrt{\alpha})|u_t| .$$

La somme des termes autres que $1/2(|u_s|^2 + |u_t|^2)$ est donc bornée par

$$C_1(1 + \alpha) + C_2(1 + \sqrt{\alpha})|u_t| + C_3(1 + \sqrt{\alpha})|u_s| .$$

Mais l'inégalité $C_3(1 + \sqrt{\alpha})|u_s| \leq 1/2|u_s|^2 + 2C_3^2(1 + \sqrt{\alpha})^2 \leq 1/2|u_s|^2 + 4C_3^2(1 + \alpha)$ et son analogue pour $C_2(1 + \sqrt{\alpha})|u_t|$ entraînent

$$\Delta\alpha \geq -A - B\alpha ,$$

avec $A = B = C_1 + 4C_2^2 + 4C_3^2$. Cette inégalité est valable pour $\alpha(s, t) \geq R^2$. Pour obtenir une inégalité globale sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ nous procédons comme dans [FH1]. Considérons une fonction lisse $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(S) \equiv 0$ pour $S \leq R^2$, $\varphi'(S) = 1$ pour $S \geq R^2 + 1$ et $\varphi''(S) > 0$ pour $R^2 < S < R^2 + 1$. Alors φ vérifie

$$(1.46) \quad S \leq \varphi(S) + C$$

pour une constante C convenable. Posons $\beta(s, t) = \varphi \circ \alpha(s, t)$. Puisque $[\beta]_\delta \leq [\alpha]_\delta$, $\delta > 0$ il suffit de montrer que β satisfait à une équation du type $\Delta\beta \geq -a - b\beta$ avec a, b des constantes positives pour en déduire une borne C^0 . L'inégalité (1.46) fournira alors une borne C^0 sur α . Le calcul suivant achève la preuve:

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \partial_s(\varphi'(\alpha(s, t)) \cdot \alpha_s) + \partial_t(\varphi'(\alpha(s, t)) \cdot \alpha_t) \\ &= \varphi''(\alpha(s, t)) \cdot ((\alpha_s)^2 + (\alpha_t)^2) + \varphi'(\alpha(s, t)) \cdot \Delta\alpha \\ &\geq \varphi'(\alpha(s, t))(-A - B\alpha) \geq -A - B\alpha \geq -A - B\beta . \end{aligned}$$

□

1.2.3 Nouvelle définition de l'homologie de Floer

Je rappelle la définition 1.2.3. Soient \widehat{M} une variété admissible et Σ une hypersurface comme dans la définition 1.2.2, trivialisant le complémentaire d'un compact par le difféomorphisme de Liouville $\Psi : \Sigma \times [1, \infty[\rightarrow \widehat{M} \setminus \text{int}(\Sigma)$. Un hamiltonien $H(t, x) : \mathbb{S}^1 \times \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est *asymptotiquement linéaire* s'il existe une fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, en notant $\tilde{H} = H \circ \Psi$ et $F(x, S) = Sf(x)$, on ait

$$\frac{|X_{\tilde{H}}(t, x, S) - X_F(x, S)|}{\sqrt{S}} \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbb{S}^1$ et $x \in \Sigma$. La norme $|\cdot|$ est considérée par rapport à une métrique conique sur $\Sigma \times [1, +\infty[$.

Soit maintenant $U \subset \widehat{M}$ un ouvert relativement compact. En suivant [FH1] on définit la classe des hamiltoniens admissibles $\mathcal{H}(U)$ par les propriétés suivantes:

- $H|_{\mathbb{S}^1 \times \overline{U}} < 0$;
- H est asymptotiquement linéaire avec une asymptote $F(x, S)$ telle que X_F n'a pas d'orbites 1-périodiques pour des valeurs suffisamment grandes de S ;
- H vérifie les conditions (1.29-1.30) i.e. il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|\nabla_t X_{\tilde{H}}(t, \bar{u}, S)|_{J_{\text{std}}} \leq c(1 + \sqrt{S}) ,$$

$$|\tilde{H}''(t, \bar{u}, S) \cdot X|_{J_{\text{std}}} \leq c|X|_{J_{\text{std}}}, \quad X \in T_{(\bar{u}, S)}(\Sigma \times [1, \infty]) ,$$

où J_{std} est une structure presque complexe compatible avec ω et standard sur $\Sigma \times [1, \infty[$.

On désigne par $\mathcal{H}_{\text{reg}}(U)$ l'ensemble des hamiltoniens dont toutes les orbites 1-périodiques sont non dégénérées, tandis que \mathcal{J} désigne l'ensemble des structures presque complexes compatibles avec ω et standard sur $\Sigma \times [1, \infty[$. Pour $H \in \mathcal{H}_{\text{reg}}(U)$ on désigne par $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble de ses orbites 1-périodiques. Elles sont toutes contenues dans un compact par le lemme 1.2.7 et l'injection compacte $H^{1,2}(\mathbb{S}^1, \widehat{M}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \widehat{M})$. En particulier, il y en a un nombre fini. Exactement la même démarche que celle expliquée dans 1.1.3. fonctionne pour définir des groupes de cohomologie de Floer, vu que nous avons établi les bornes C^0 valables a priori sur les solutions de l'équation

$$u_s + \widehat{J}(s, t, u)u_t - \nabla H(s, t, u) = 0$$

qui satisfont à la condition supplémentaire

$$-\infty < \inf_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)), \quad \sup_{s \in \mathbb{R}} A_{H(s)}(u(s)) < +\infty .$$

Celle-ci est automatiquement vérifiée sous l'hypothèse imposée dans la construction de Floer

$$u(s) \rightarrow x^\pm, \quad s \rightarrow \pm\infty ,$$

avec $x^- \in \mathcal{P}(H)$, $x^+ \in \mathcal{P}(K)$, $(H, J) \prec (K, \tilde{J})$ et J, \tilde{J} des structures presque complexes régulières pour H et K respectivement.

Il faut noter que, par leur définition même, les groupes d'homologie de Floer $FH^*_{[a,b]}(U)$ sont calculables à l'aide de toute suite cofinale (H_n, J_n) , $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} FH^*_{[a,b]}(U) &= \varprojlim_n FH^*_{[a,b]}(H_n, J_n) , \\ FH^*_{[a,+\infty[}(U) &= \varprojlim_b FH^*_{[a,b]}(U), \quad b \rightarrow \infty , \\ FH^*(U) &= FH^*_{[-\infty, \infty[}(U) . \end{aligned}$$

En particulier, pour $U = M$ notre définition des groupes d'homologie de Floer coïncide avec celle de C. Viterbo [V2]: les hamiltoniens décrits dans 1.1.3. sont admissibles, asymptotiquement linéaires et forment une famille cofinale dans $\mathcal{H}_{\text{reg}}(M)$. Comme annoncé, notre définition étend à la fois celle de [FH1] et celle de [V2].

Remarque 1. La présente définition des groupes d'homologie symplectique est susceptible d'applications pour ce qui est des capacités symplectiques d'ouverts dans des variétés admissibles (convexes à l'infini) plus générales que \mathbb{C}^n . Je ne poursuis pas cette recherche dans cette thèse.

Remarque 2. Rappelons le fait que D. Hermann [He1] a démontré que, pour des ouverts RCT bornés dans \mathbb{C}^n , l'homologie intrinsèque au sens de [V2] coïncide avec l'homologie extrinsèque au sens de [FH1]. Le même résultat restera vrai dans notre cadre : pour toute variété admissible \widehat{M} et tout ouvert $U \subset \widehat{M}$ borné et à bord de type contact restreint, l'homologie intrinsèque de U définie en termes de \widehat{U} coïncide avec son homologie extrinsèque définie en termes de \widehat{M} .

Pour clore cette section, je donne un résultat d'invariance par isotopie qui prolonge le corollaire 1.1.8.

Proposition 1.2.9. *Soient $U \subset U'$ deux ouverts à bord lisse de \widehat{M} satisfaisant aux conditions suivantes :*

- ∂U et $\partial U'$ sont contenus dans le domaine de définition du champ de Liouville étendu à \widehat{M} par $S_{\frac{\partial}{\partial S}}$;
- le champ de Liouville est transverse et extérieur à ∂U , $\partial U'$.

Soit V un ouvert tel que $U \subset V \subset U'$. Alors il y a des isomorphismes canoniques

$$FH^*(U) \xleftarrow{\sim} FH^*(V) \xleftarrow{\sim} FH^*(U') .$$

Démonstration. La remarque à faire est que toute inclusion d'ouverts $U \xhookrightarrow{I} U'$ détermine un morphisme en homologie de Floer

$$FH^*(U') \xrightarrow{I^*} FH^*(U) ,$$

vu que tout hamiltonien admissible pour U' l'est aussi pour U . Un argument similaire à [FH1], Thm. 36 permet de prouver que, sous nos hypothèses, le morphisme I^* est un isomorphisme qui coïncide avec celui du 1.1.8.

Considérons maintenant un ouvert $V' = \varphi_T(V)$, où φ_t est le flot du champ de Liouville et $T > 0$ est choisi suffisamment grand pour que $U' \subset V'$. Comme $(V', \omega) \simeq (V, e^t \omega)$ il s'ensuit directement que l'inclusion $V \subset V'$ induit un isomorphisme en homologie de Floer.

Aux inclusions $U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{j} U' \xrightarrow{k} V'$ correspond la suite (non exacte!) de morphismes en homologie de Floer

$$FH^*(V') \xrightarrow{k^*} FH^*(U') \xrightarrow{j^*} FH^*(V) \xrightarrow{i^*} FH^*(U) .$$

Par ce qui précède les morphismes composés $j^* \circ k^*$ et $i^* \circ j^*$ sont des isomorphismes. Cela entraîne que j^* est un isomorphisme et, par conséquent, k^* et i^* le sont aussi.

□

2. LA FORMULE DE KÜNNETH EN (CO)HOMOLOGIE DE FLOER

2.1 Contexte et principe de démonstration

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, le peu de résultats calculatoires concernant l'homologie de Floer non tronquée des variétés à bord de type contact rend intéressante la mise en évidence de structures algébriques associées à des structures géométriques additionnelles sur la variété. Je démontre ci-dessous une formule de Künneth pour un produit de variétés symplectiques à bord de type contact restreint et je donne des applications à la conjecture de Weinstein dans des produits $\widehat{M} \times \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ où \widehat{M} est une variété admissible avec champ de Liouville globalement défini (par exemple un cotangent T^*N de variété compacte).

Une formule de ce type a été démontrée pour un produit de disques de \mathbb{C} par A. Floer, H. Hofer et K. Wysocki dans [FW1] et c'est du même article (p. 583 et p. 595) que j'ai emprunté certaines idées de preuve. Pour un produit de variétés symplectiques arbitraires à bord de type contact restreint, la formule a été annoncée par C. Viterbo dans [V2].

A la fin du chapitre j'indique une application à l'existence d'orbites périodiques sur certaines hypersurfaces d'un produit $\widehat{M} \times \widehat{N}$ avec \widehat{M} variété admissible et \widehat{N} variété de Stein sous-critique. Pour $\widehat{N} = \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ le résultat est apparenté à l'article de H. Hofer et C. Viterbo [HV].

2.1.1 Hypothèses de travail

On considère (M, ω) et (N, σ) des variétés symplectiques à bord de type contact restreint (RCT). Cela veut dire qu'il existe des champs de vecteurs X, Y globalement définis sur M et respectivement N , transverses au bord et vérifiant

$$L_X \omega = \omega ,$$

$$L_Y \sigma = \sigma .$$

Les flots de X et Y dilatent (exponentiellement) les volumes $(\varphi_t^X)^* \omega = e^t \omega$, $(\varphi_t^Y)^* \sigma = e^t \sigma$ et cela entraîne automatiquement le fait que X et Y sont extérieurs le long du bord.

Nous nous proposons ci-dessous d'étudier l'homologie de Floer (non tronquée) du produit $(M \times N, \omega \oplus \sigma)$. C'est une variété symplectique à bord singulier $(M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)$, dont le lieu singulier est $\partial M \times \partial N$. On désigne par $\pi_M, \pi_N : M \times N \longrightarrow M, N$ les projections sur M et N respectivement. Le champ

$$Z = \pi_M^* X + \pi_N^* Y$$

est globalement défini sur $M \times N$ et vérifie encore

$$L_Z (\omega \oplus \sigma) = \omega \oplus \sigma .$$

Il est de plus transverse à $\partial(M \times N)$ le long de la partie lisse et reste transverse à tout lissage C^1 -petit de la partie singulière $\partial M \times \partial N$. Par conséquent, la variété symplectique $M \times N$ est canoniquement à bord de type contact restreint (modulo un lissage C^1 -petit).

La raison pour laquelle nous avons supposé que M et N sont à bord de type contact restreint plutôt que simplement à bord de type contact devient en ce moment claire: le bord du produit $M \times N$ fait intervenir M et N et pas seulement leurs bords. Il est par conséquent nécessaire, afin de pouvoir construire un champ de Liouville de la forme $Z = \pi_M^* X + \pi_N^* Y$, d'avoir des champs de Liouville globalement définis sur M et N .

A première vue, le fait de travailler avec une variété symplectique à coins peut sembler gênant. En pratique, cela ne pose pas de problèmes vu la remarque suivante: la (co)homologie de Floer non tronquée d'une variété M à bord est en fait un invariant de la variété complétée \widehat{M} . Le vrai espace dont on cherche à calculer la (co)homologie de Floer est en réalité le produit $\widehat{M} \times \widehat{N}$ qui, lui, est non compact mais lisse. C'est une variété admissible au sens de la définition 1.2.2, symplectomorphe à la complétée de tout lissage C^1 -petit de $\partial(M \times N)$. Un autre point de vue rassurant est le suivant: on peut regarder $M \times N$ comme un ouvert de $\widehat{M} \times \widehat{N}$ et son homologie de Floer est bien définie en termes de hamiltoniens asymptotiquement linéaires comme dans le chapitre précédent. De plus, $FH^*(M \times N)$ (respectivement $FH_*(M \times N)$) est isomorphe à $FH^*(\text{int}(\Sigma))$ (respectivement $FH_*(\text{int}(\Sigma))$), où Σ est un lissage de $\partial(M \times N)$ transverse au champ de Liouville: en effet, nous pouvons encadrer $M \times N$ entre deux tels ouverts $\text{int}(\Sigma)$ et $\text{int}(\Sigma')$ et appliquer la proposition 1.2.9.

2.1.2 Enoncé des résultats

Les différentes versions de la formule de Künneth, y compris celle que nous allons établir, ont comme fondement le résultat suivant, que nous appellerons *formule de Künneth algébrique* et sur lequel on pourra par exemple consulter A. Dold [D] VI.9.13.

Théorème 2.1.1. *Soient C_* et D_* des complexes différentiels homologiques de \mathbb{Z} -modules libres. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a une suite exacte fonctorielle en C_* et D_* :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{r+s=k} H_r(C_*) \otimes_{\mathbb{Z}} H_s(D_*) \longrightarrow H_k(C_* \otimes D_*) \longrightarrow \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_r(C_*), H_s(D_*)) \longrightarrow 0.$$

Cette suite exacte est scindée, mais pas canoniquement.

On désigne par $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ (ou encore $\text{Tor}_1(A, B)$) le produit de torsion des groupes abéliens A et B . Il est défini de la façon suivante. Soit $0 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ une résolution libre à deux termes pour A . On définit $\text{Tor}_1(A, B)$ de façon à compléter la suite exacte $0 \rightarrow \text{Tor}_1(A, B) \rightarrow R \otimes B \rightarrow F \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow 0$. En fait $\text{Tor}_1(A, \cdot)$ est le premier (et le seul, puisque A est un module sur un anneau principal) foncteur dérivé de $A \otimes \cdot$. Il vérifie $\text{Tor}_1(\mathbb{Z}, B) = 0$ car \mathbb{Z} est libre et $\text{Tor}_1(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_{\text{pgcd}(m, n)}$. En pratique, ce sont toutes les informations dont on a besoin ([Br] V.6).

Le théorème de Künneth algébrique a des conséquences immédiates pour ce qui est du calcul de l'homologie d'un produit $X \times Y$ d'espaces topologiques car le produit tensoriel des complexes de (co)chaînes sur X et Y calcule la (co)homologie du produit $X \times Y$ (théorème d'Eilenberg-Zilber [D] VI.12.1). Nous donnons la version de Künneth valable en homologie relative pour un produit de variétés à bord: le triple $(M \times N, \partial M \times N, M \times \partial N)$ est excisif,

vu que $\partial M \times N$ et $M \times \partial N$ sont des sous-complexes de $M \times N$ [D] V.4.6. et la formule de Künneth en homologie relative s'appliquera [D] VI.12.16. D'ailleurs, on peut aussi raisonner directement en termes d'homologie de Morse comme dans 3.5.1 afin d'obtenir :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \bigoplus_{r+s=k} H_r(M, \partial M) \otimes_{\mathbb{Z}} H_s(N, \partial N) & \longrightarrow & H_k(M \times N, \partial M \times N \cup M \times \partial N) \\ & & \downarrow \\ & & \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_r(M, \partial M), H_s(N, \partial N)) \rightarrow 0 \end{array}$$

Nous pouvons maintenant énoncer nos résultats:

Théorème 2.1.2 (Formule de Künneth en homologie de Floer). *Soient (M, ω) , (N, σ) des variétés symplectiques compactes à bord non vide de type contact restreint. On suppose que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = \langle c_1(M), \pi_2(M) \rangle = 0$, $\langle \sigma, \pi_2(N) \rangle = \langle c_1(N), \pi_2(N) \rangle = 0$. On pose $\dim M = 2m$, $\dim N = 2n$.*

a. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a une suite exacte :*

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M, \omega) \otimes FH_s(N, \sigma) & \longrightarrow & FH_k(M \times N, \omega \oplus \sigma) \\ & & \downarrow \\ & & \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(M, \omega), FH_s(N, \sigma)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Cette suite exacte est scindée, mais pas canoniquement.

b. *On a le morphisme suivant entre les suites exactes de Künneth, où c_* désigne l'application de l'homologie singulière vers l'homologie de Floer définie au (1.16), k, r, s, r', s' sont des entiers et l'homologie est calculée à coefficients entiers.*

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M) \otimes FH_s(N) & \longrightarrow & FH_k(M \times N) & \longrightarrow & \text{Tor}_{1, k-1}(FH) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow c_* \otimes c_* & & \uparrow c_* & & \uparrow \text{Tor}(c_*) \\ & & \bigoplus_{r+s=k} H_{m+r}(M, \partial M) \otimes H_{n+s}(N, \partial N) & & & & \widetilde{\text{Tor}}_{1, m+n+k-1}(H) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r'+s'=m+n+k} H_{r'}(M, \partial M) \otimes H_{s'}(N, \partial N) & \longrightarrow & H_{m+n+k}(M \times N, \partial(M \times N)) & \longrightarrow & \text{Tor}_{1, m+n+k-1}(H) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nous avons utilisé les notations suivantes ($k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{1, k-1}(FH) &= \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(M), FH_s(N)) , \\ \text{Tor}_{1, m+n+k-1}(H) &= \bigoplus_{r'+s'=m+n+k-1} \text{Tor}_1(H_{r'}(M, \partial M), H_{s'}(N, \partial N)) , \\ \widetilde{\text{Tor}}_{1, m+n+k-1}(H) &= \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(H_{m+r}(M, \partial M), H_{n+s}(N, \partial N)) . \end{aligned}$$

Les mêmes résultats sont valables à coefficients dans un A -module quelconque, avec A un anneau arbitraire, en remplaçant $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ par Tor_1^A .

Théorème 2.1.3 (Formule de Künneth en cohomologie de Floer à coefficients dans un corps). *Sous les hypothèses du théorème 2.1.2 les affirmations suivantes sont valables :*

a. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a un isomorphisme*

$$(2.3) \quad \bigoplus_{r+s=k} FH^r(M, \omega) \otimes FH^s(N, \sigma) \xrightarrow{\sim} FH^k(M \times N, \omega \oplus \sigma) ,$$

les groupes de cohomologie étant calculés à coefficients dans un corps.

b. *On a le diagramme commutatif suivant, où c^* désigne l'application depuis la cohomologie de Floer vers la cohomologie singulière définie au (1.13), k, r, s, r', s' sont des entiers et la cohomologie est calculée à coefficients dans un corps.*

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{r+s=k} FH^r(M) \otimes FH^s(N) & \xrightarrow{\sim} & FH^k(M \times N) \\ \downarrow c^* \otimes c^* & & \downarrow c^* \\ \bigoplus_{r+s=k} H^{m+r}(M, \partial M) \otimes H^{n+s}(N, \partial N) & & \\ \parallel & & \\ \bigoplus_{r'+s'=m+n+k} H^{r'}(M, \partial M) \otimes H^{s'}(N, \partial N) & \xrightarrow{\sim} & H^{m+n+k}(M \times N, \partial(M \times N)) \end{array}$$

2.1.3 Principe de la démonstration

Rappelons que l'homologie de Floer est définie comme

$$FH_*(M, \omega) = \varinjlim_{(H, J)} FH_*(M, H, J) ,$$

où H parcourt un ensemble dirigé de hamiltoniens admissibles et on a ignoré les problèmes de troncature par les valeurs de l'action. En analogie avec l'interprétation de la formule de Künneth en homologie de Morse, l'idée immédiate est de considérer sur $M \times N$ le hamiltonien $H + K$, où H et K sont admissibles sur M et N respectivement. En choisissant sur $M \times N$ comme structure presque complexe le produit de structures presque complexes admissibles sur M et N , le complexe de Floer associé à $H + K$ s'identifiera au produit tensoriel des complexes de Floer associés à H et K

$$FC_*(M \times N, H + K) = FC_*(M, H) \otimes FC_*(N, K) .$$

On obtient

$$FH_*(M \times N, H + K, J_1 \oplus J_2) = H_*(FC_*(M, H, J_1) \otimes FC_*(N, K, J_2)) .$$

Or, par le théorème de Künneth algébrique, le terme $H_*(FC_*(M, H) \otimes FC_*(N, K))$ s'insère dans une suite exacte similaire à celle de l'énoncé du théorème

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M, H) \otimes FH_s(N, K) & \longrightarrow & H_k(FC_*(M, H) \otimes FC_*(N, K)) \\ & & \downarrow \\ & & \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(M, H), FH_s(N, K)) \rightarrow 0 \end{array}$$

Le point crucial dans la preuve du théorème de Künneth homologique est le fait que la limite inductive est un foncteur exact qui de plus commute avec les produits tensoriels et avec leurs foncteurs dérivés - en particulier avec le foncteur Tor_1 dans la catégorie des groupes abéliens. En passant à la limite inductive selon les H et K admissibles sur M et N on déduit une suite exacte

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M, \omega) \otimes FH_s(N, \sigma) & \longrightarrow & \varinjlim FH_k(M \times N, H + K) \\ & & \downarrow \\ & & \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(M, \omega), FH_s(N, \sigma)) \rightarrow 0 \end{array}$$

avec $\varinjlim FH_k(M \times N, H + K)$ étant prise sur les hamiltoniens admissibles H et K . Il s'agit de montrer que cette limite inductive calcule effectivement $FH_k(M \times N, \omega \oplus \sigma)$.

Pour $M = U \subset \mathbb{C}^m$, $N = V \subset \mathbb{C}^n$ des ouverts à bord de type contact restreint, cette approche fonctionne telle quelle: la somme $H + K$ de deux hamiltoniens asymptotiquement quadratiques au sens de [FH1] l'est encore. Nous allons présenter une preuve détaillée pour cette situation dans la section suivante - elle servira de modèle pour suivre les constructions ultérieures.

Lorsque les variétés M et N sont arbitraires, une première étape consiste à étendre la définition des hamiltoniens asymptotiquement quadratiques et à définir une homologie de Floer dans ce nouveau contexte. Cela a été réalisé dans le chapitre précédent avec ce que j'ai appelé "hamiltoniens asymptotiquement linéaires" (a.l.). Malheureusement, même avec cette définition étendue, une somme $H + K$ de hamiltoniens a.l. ne l'est pas forcément. Je serai amené à la déformer de façon à la rendre a.l. Cela sera réalisé avec des éléments H et K d'une forme spéciale, inspirée par [V2] et [He2].

A la différence de l'homologie, la cohomologie de Floer utilise des limites projectives. Or la limite projective est exacte à gauche, mais n'est généralement pas exacte. L'exactitude est valable pour des espaces vectoriels de dimension finie et cela explique l'énoncé plus restrictif du théorème de Künneth cohomologique.

2.2 Formule de Künneth pour des ouverts RCT bornés dans \mathbb{C}^n

J'utilise dans cette section la définition de [FH1] pour l'homologie de Floer. Voici un rappel des propriétés auxquelles doivent vérifier les hamiltoniens $H : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admissibles pour un ouvert borné $U \subset \mathbb{C}^n$:

- a. $H|_{\mathbb{S}^1 \times \bar{U}} < 0$;
- b. il existe une matrice A définie positive telle que

$$\frac{|H'(t, u) - Au|}{|u|} \rightarrow 0, \quad |u| \rightarrow \infty,$$

uniformément en $t \in \mathbb{S}^1$;

- c. le système différentiel

$$-i\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x(1)$$

admet seulement la solution triviale $x \equiv 0$;

d. il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\| H''(t, u) \| \leq c,$$

$$\left| \frac{\partial H'}{\partial t}(t, u) \right| \leq c(1 + |u|), \quad \forall t \in \mathbb{S}^1, u \in \mathbb{C}^n.$$

La classe des hamiltoniens admissibles pour un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ est notée $\mathcal{H}(U)$. L'observation fondamentale est que $H + K$ est admissible pour $U \times V \subset \mathbb{C}^p$, $p = m + n$, si H et K le sont pour $U \subset \mathbb{C}^m$, respectivement $V \subset \mathbb{C}^n$. Les conditions a, c, d sont immédiates à vérifier, la matrice définie positive associée à $H + K$ étant

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où A, B sont les matrices définies positives associées à H et K respectivement. Montrons que la condition b est aussi vérifiée i.e.

$$(2.5) \quad \frac{|(H + K)'(t, u, v) - Au - Bv|}{|(u, v)|} \rightarrow 0, \quad |(u, v)| \rightarrow \infty.$$

Il suffit de montrer

$$(2.6) \quad \frac{|H'(t, u) - Au|}{|(u, v)|} + \frac{|K'(t, v) - Bv|}{|(u, v)|} \rightarrow 0, \quad |(u, v)| \rightarrow \infty,$$

ou bien que, étant donnée une fonction $f \geq 0$ continue telle que $\frac{f(x)}{|x|} \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$ on a $\frac{f(x)}{|(x, y)|} \rightarrow 0$, $|(x, y)| \rightarrow \infty$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $L > 0$ tel que $\frac{f(x)}{|x|} < \epsilon$ pour $|x| \geq L$. Soit $a = f(0) \geq 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) < a + 1$ pour $|x| \leq \delta$. Soit $M = \max_{|x| \geq \delta} \frac{f(x)}{|x|} \geq 0$. Posons $S := \max\{\frac{a+1}{\epsilon}, \frac{ML}{\epsilon}\}$. J'affirme que $\frac{f(x)}{|(x, y)|} < \epsilon$ pour $|(x, y)| \geq S$. En effet, trois cas peuvent se présenter. Soit $|x| \geq L$ et $\frac{f(x)}{|(x, y)|} = \frac{f(x)}{|x|} \frac{|x|}{|(x, y)|} < \epsilon \cdot 1 = \epsilon$. Soit $\delta \leq |x| < L$ et $\frac{f(x)}{|(x, y)|} = \frac{f(x)}{|x|} \frac{|x|}{|(x, y)|} < \frac{ML}{S} \leq \epsilon$. Soit, finalement, $|x| < \delta$ et $\frac{f(x)}{|(x, y)|} < \frac{a+1}{S} \leq \epsilon$. On en déduit (2.6) en prenant $f(u) = |H'(t, u) - Au|$ ou $f(v) = |K'(t, v) - Bv|$. Il s'ensuit que (2.5) est aussi vraie.

Il est clair que $H + K$ décrit une famille cofinale dans $\mathcal{H}(U \times V)$ lorsque H et K décrivent des familles cofinales dans $\mathcal{H}(U)$ et $\mathcal{H}(V)$ respectivement.

Le complexe de Floer associé à $H + K$ s'identifie au produit tensoriel des complexes de Floer de H et K en considérant sur \mathbb{C}^p , $p = m + n$ la structure presque complexe $J_1 \oplus J_2$, avec J_1 et J_2 des structures presque complexes admissibles - en particulier égales à i hors d'un compact. Par contre, leur produit vérifie cette dernière propriété uniquement lorsque $J_1 = i$ et $J_2 = i$. Comme indiqué dans [FW1], p. 595 nous pouvons remédier à ce problème de deux manières différentes, afin de nous placer dans le cadre des structures presque complexes admissibles.

1. Un résultat de transversalité ([FH1], Proposition 17; voir aussi [FHS], 5.1 et 5.4) assure qu'il existe une suite cofinale de hamiltoniens réguliers pour une structure presque complexe admissible donnée. Prenons alors $J_1 = i$, $J_2 = i$ et (H_n) , (K_n) des suites cofinales de hamiltoniens admissibles et réguliers pour (U, J_1) et (V, J_2) respectivement. J'affirme que $H_n + K_n$ est aussi régulier pour $J_1 \oplus J_2$. En effet, le système hamiltonien généré par $H_n + K_n$ est découpé :

$$\begin{aligned} \dot{z} = X_{H_n + K_n}(z), \quad z = (x, y) \\ z(0) = z(1) \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = X_{H_n}(x), & x(0) = x(1) \\ \dot{y} = X_{K_n}(y), & y(0) = y(1) \end{cases}$$

et une orbite de période 1 de $H_n + K_n$ s'identifie de façon biunivoque à un couple d'orbites de période 1 de H_n et K_n respectivement. L'équation des trajectoires de Floer est elle-même découpée

$$\begin{aligned} u_s - iu_t - \nabla(H_n + K_n)(t, u(s, t)) = 0 \\ u(-\infty) = z^- = (x^-, y^-) \\ u(+\infty) = z^+ = (x^+, y^+) \\ u = (v, w) \end{aligned} \iff \begin{cases} v_s - iv_t - \nabla H_n(t, v(s, t)) = 0, & v(-\infty) = x^- \\ & v(+\infty) = x^+ \\ w_s - iw_t - \nabla K_n(t, w(s, t)) = 0, & w(-\infty) = y^- \\ & w(+\infty) = y^+ \end{cases}$$

et cela entraîne de suite que le hamiltonien $H_n + K_n$ est régulier si H_n et K_n le sont, au sens où

$$\bar{\partial}_{H_n + K_n, i} = \bar{\partial}_{H_n, i} \oplus \bar{\partial}_{K_n, i} : \mathcal{B}^{1,p}(z^-, z^+) = \mathcal{B}^{1,p}(x^-, x^+) \oplus \mathcal{B}^{1,p}(y^-, y^+) \longrightarrow L^p(Z, \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^n)$$

admet 0 comme valeur régulière pour tout couple (z^-, z^+) . Nous avons noté, en accord avec [FH1], §3.2 :

$$\mathcal{B}^{1,p}(z^-, z^+) = u_0 + W^{1,p}(Z, \mathbb{C}^p),$$

avec $u_0 : Z \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $u_0(\pm\infty) = z^\pm$. Ceci entraîne que les espaces de trajectoires $\mathcal{M}(z^-, z^+, H_n + K_n, i) \equiv \mathcal{M}(x^-, x^+, H_n, i) \times \mathcal{M}(y^-, y^+, K_n, i)$ sont lisses et de dimension finie. En vue du fait que l'action vérifie

$$A_{H+K}(z) = A_H(x) + A_K(y), \quad z = (x, y)$$

et en vue du découplage de l'équation des trajectoires de Floer on déduit l'identification présente déjà dans [FH1], p. 86

(2.7)

$$FC_k^a(H + K, i) = \bigoplus_{r+s=k} \bigcup_{c \in \mathbb{R}} FC_r^{a-c}(H, i) \otimes FC_s^c(K, i) \subset \bigoplus_{r+s=k} FC_r^\infty(H, i) \otimes FC_s^\infty(K, i).$$

On a noté $FC_*^a = FC_*^{]-\infty, a]}$. L'inclusion précédente est vraie au niveau des *complexes différentiels* et pas seulement au niveau des groupes abéliens sous-jacents grâce au fait que les trajectoires de Floer sont découpées.

Il suffit à présent d'avoir un contrôle sur l'action des orbites périodiques de H et K pour comprendre la réunion précédente. Dans le cas où les ouverts U, V sont à *bord de type contact restreint*, David Hermann construit dans [He2], §4.1 des suites cofinales $(H_n), (K_n)$ de hamiltoniens admissibles pour lesquels l'action des orbites 1-périodiques satisfait la propriété suivante:

- soit elle est comprise dans un intervalle $[-\delta, +\infty[$, $\delta > 0$ fixé et arbitrairement petit,
- soit elle tend uniformément vers $-\infty$ avec n .

Un théorème de transversalité dans [FH1], §3.2 assure qu'on peut rendre les hamiltoniens réguliers pour la structure complexe i par une perturbation arbitrairement petite en dehors de petits voisinages des orbites périodiques, sans faire apparaître d'autres orbites périodiques. De cette façon, pour n assez grand et $b, \delta > 0$ fixés avec δ suffisamment petit, on pourra écrire la suite de morphismes de complexes

$$\begin{aligned}
(2.8) \quad \bigoplus_{r+s=k} FC_r^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(H_n, i) \otimes FC_s^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(K_n, i) &\rightarrow FC_k^{[-\delta, b]}(H_n + K_n, i) \rightarrow \bigoplus_{r+s=k} FC_r^{[-\delta, 2b]}(H_n, i) \otimes FC_s^{[-\delta, 2b]}(K_n, i) \\
&\rightarrow FC_k^{[-\delta, 4b]}(H_n + K_n, i) .
\end{aligned}$$

On obtient en homologie le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(2.9) \quad H_k(FC_*^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(H_n, i) \otimes FC_*^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(K_n, i)) & \dashrightarrow & H_k(FC_*^{[-\delta, 2b]}(H_n, i) \otimes FC_*^{[-\delta, 2b]}(K_n, i)) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow \\
FH_k^{[-\delta, b]}(H_n + K_n, i) & \dashrightarrow & FH_k^{[-\delta, 4b]}(H_n + K_n, i)
\end{array}$$

qui, après passage à la limite inductive selon $n \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow +\infty$ donne

$$\begin{array}{ccc}
(2.10) \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{H_n, K_n} H_k(FC_*^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(H_n, i) \otimes FC_*^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(K_n, i)) & \dashrightarrow & \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{H_n, K_n} H_k(FC_*^{[-\delta, 2b]}(H_n, i) \otimes FC_*^{[-\delta, 2b]}(K_n, i)) \\
\downarrow & \nearrow \sim & \downarrow \\
FH_k(U \times V) & \dashrightarrow & FH_k(U \times V)
\end{array}$$

On voit facilement que *les flèches horizontales sont des isomorphismes* puisque nous pouvons changer l'ordre dans lequel on prend les deux limites inductives, selon n et b respectivement. Cela entraîne que *la flèche diagonale est aussi un isomorphisme*. D'un autre côté, le théorème de Künneth algébrique implique l'existence de la suite exacte courte

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad 0 &\longrightarrow \bigoplus_{r+s=k} FH_r(U) \otimes FH_s(V) \longrightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{H_n, K_n} H_k(FC_*^{[-\delta, 2b]}(H_n, i) \otimes FC_*^{[-\delta, 2b]}(K_n, i)) \\
&\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
&\qquad\qquad\qquad \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(U), FH_s(V)) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

On déduit la validité de la suite exacte courte représentant la formule de Künneth pour des ouverts de \mathbb{C}^n à bord de type contact restreint :

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad 0 &\longrightarrow \bigoplus_{r+s=k} FH_r(U) \otimes FH_s(V) \longrightarrow FH_k(U \times V) \\
&\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
&\qquad\qquad\qquad \bigoplus_{r+s=k-1} \text{Tor}_1(FH_r(U), FH_s(V)) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

La commutativité du diagramme (2.2) est immédiate.

2. On peut aussi obtenir la suite exacte de Künneth (2.12) en travaillant directement avec deux structures presque complexes admissibles J_1 et J_2 et en remarquant avec [FW1], p. 595 les deux faits suivants :

- l'homologie $FH_{[a,b]}^*(H + K, J_1 \oplus J_2)$ est bien définie lorsque H et K sont réguliers pour J_1 et J_2 ;

- les estimations C^0 que nous avons établies au chapitre précédent sont encore valables pour une homotopie “scindée” i.e. qui s’écrit $\widehat{J}(s, t, (z_1, z_2)) = J_1(s, t, z_1) \oplus J_2(s, t, z_2)$ en dehors d’un compact. En choisissant une telle homotopie reliant $J_1 \oplus J_2$ à une structure presque complexe J admissible sur \mathbb{C}^p , on obtient l’isomorphisme $FH_*^{[a,b]}(H + K, J_1 \oplus J_2) \simeq FH_*^{[a,b]}(H + K, J)$. Par conséquent

$$\lim_{\substack{a \leq 0 \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{\xrightarrow{H, K}} FH_*^{[a,b]}(H + K, J_1 \oplus J_2) = FH_*(U \times V) .$$

Maintenant on peut suivre l’argument du 1. avec J_1 et J_2 à la place de i pour déduire la validité de la suite exacte (2.12).

2.3 Hamiltoniens asymptotiquement linéaires et produits de variétés

J’explique dans cette section pourquoi la somme de deux hamiltoniens asymptotiquement linéaires définis sur des variétés de type contact restreint n’est pas en général asymptotiquement linéaire sur le produit des variétés. Cela motivera la construction auxiliaire que j’utilise dans la section 2.4 pour donner la démonstration du théorème 2.1.2.

Les notions de variété admissible, de structure presque complexe standard sur $(\Sigma \times [1, \infty[, d(S\lambda))$ avec (Σ, λ) une variété de contact, ainsi que de hamiltonien asymptotiquement linéaire sont celles définies dans le chapitre antérieur. Je rappelle qu’une structure presque complexe standard vérifie

$$\begin{cases} J|_{\xi} = J_0, \\ J(\frac{\partial}{\partial S}) = \frac{1}{S} X_{\text{Reeb}}(x), \\ J(X_{\text{Reeb}}(x)) = -S \frac{\partial}{\partial S}, \end{cases} \quad (x, S) \in \Sigma \times [1, +\infty[.$$

La métrique associée (que j’appelle métrique conique) satisfait à la relation d’homogénéité

$$(2.13) \quad \left| v + a \frac{\partial}{\partial S} \right|_{(x,S)}^2 = S \left| v + \frac{a}{S} \frac{\partial}{\partial S} \right|_{(x,1)}^2, \quad v \in T_x \Sigma, \quad a \in \mathbb{R} .$$

Le produit symplectique de deux variétés admissibles $(\widehat{M}, \omega'), (\widehat{N}, \omega'')$ à *champs de Liouville globalement définis* est encore une variété admissible. Si les champs de Liouville respectifs sont η' et η'' alors $\eta = \eta' \oplus \eta''$ est un champ de Liouville globalement défini et complet sur $\widehat{M} \times \widehat{N}$. Il est facile de construire une hypersurface Σ comme dans la définition d’une variété admissible en lissant le produit $M \times N$ le long de $\partial M \times \partial N$. Pour faciliter l’écriture, on pose :

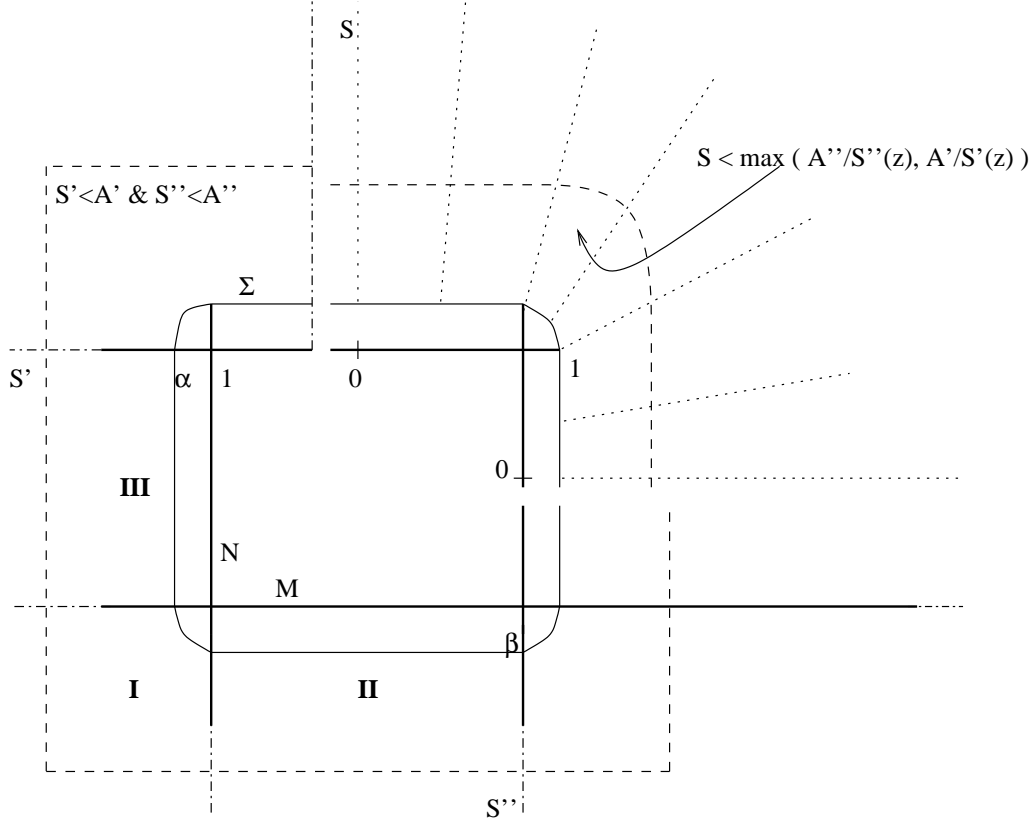
$$\mathbf{I} = \partial M \times [1, +\infty[\times \partial N \times [1, +\infty[,$$

$$\mathbf{II} = M \times \partial N \times [1, +\infty[,$$

$$\mathbf{III} = \partial M \times [1, +\infty[\times N .$$

Bien évidemment $\mathbf{I} \cup \mathbf{II} \cup \mathbf{III} = \widehat{M} \times \widehat{N} \setminus M \times N$. Dans la Figure 2.1 on indique un choix de Σ située à l’extérieur de $M \times N$, telle que

$$\Sigma_{II} \stackrel{\text{not.}}{=} \Sigma \cap \mathbf{II} = M \times \partial N \times \{\beta\}, \quad \beta > 1 ,$$

Fig. 2.1: Paramétrisation de $\widehat{M} \times \widehat{N}$ par le flot de Liouville

$$\Sigma_{III} \stackrel{\text{not.}}{=} \Sigma \cap \text{III} = \partial M \times \{\alpha\} \times N, \quad \alpha > 1.$$

On notera

$$\Sigma_I = \Sigma \cap \text{I}.$$

Soient $H(\underline{x})$, $K(\underline{y})$ des hamiltoniens asymptotiquement linéaires (a.l.) sur \widehat{M} et respectivement \widehat{N} . On dénote encore par H et K les hamiltoniens $H(\underline{x}, \underline{y}) \stackrel{\text{not.}}{=} H(\underline{x})$, $K(\underline{x}, \underline{y}) \stackrel{\text{not.}}{=} K(\underline{y})$ définis sur $\widehat{M} \times \widehat{N}$. La notion de hamiltonien a.l. est additive sur une variété admissible fixée. Par conséquent, il suffit d'étudier l'asymptoticité linéaire de H et K respectivement pour avoir des informations complètes sur $H + K$.

L'hypothèse a.l. pour H sur \widehat{M} s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \exists L(\epsilon) > 0, \forall S' \geq L(\epsilon), \forall t \in \mathbb{S}^1, x \in \partial M, \frac{|X_H(t, x, S') - X_F(x, S')|_{J'}}{\sqrt{S'}} \leq \epsilon,$$

où $F(x, S') = S'f(x)$ est l'asymptote donnée par la définition 1.2.3. Soit $\Psi : \Sigma \times [1, \infty[\rightarrow \widehat{M} \times \widehat{N} \setminus \text{int}(\Sigma)$ la paramétrisation donnée par le flot du champ de Liouville η i.e. $\Psi(z, S) = \varphi_{\ln S}(z)$. On montre que $\tilde{H} = H \circ \Psi$ est asymptotique à $\tilde{F} = F \circ \Psi$ sur $(\Sigma_I \cup \Sigma_{III}) \times [1, +\infty[$, mais qu'en général il n'est pas possible de trouver une asymptote linéaire sur $\Sigma_{II} \times [1, \infty[$. Notons

que la fonction \tilde{F} est bien de type linéaire sur $(\Sigma_I \cup \Sigma_{III}) \times [1, +\infty[$:

$$\tilde{F}(z, S) = F(x(z), SS'(z)) = S \cdot S'(z) f(x(z))$$

a) Asymptoticité sur $\Sigma_I \times [1, +\infty[$. Elle découle de l'équivalence de toute métrique conique g avec la tirée en arrière \tilde{g} par Ψ de la métrique produit sur $\widehat{M} \times \widehat{N}$, chacun des facteurs étant muni d'une métrique conique. Comme Ψ est un symplectomorphisme, la métrique \tilde{g} est associée à la structure presque complexe $\tilde{J} = \Psi^*(J' \oplus J'')$, où J', J'' sont des structures presque complexes standard sur \widehat{M} et \widehat{N} . Soit aussi J une structure standard sur $\Sigma \times [1, +\infty[$. Tout comme g , la métrique \tilde{g} vérifie aussi la relation d'homogénéité (2.13) :

$$\begin{aligned} & |v + a \frac{\partial}{\partial S}|_{\tilde{J}, (z, S)}^2 \\ &= |\Psi_*(v + a \frac{\partial}{\partial S})|_{J' \oplus J'', (x(z), SS'(z)), (y(z), SS''(z))}^2 \\ &= |dx(v) + (SdS'(v) + aS'(z)) \frac{\partial}{\partial S'}|_{J', (x(z), S'(z))}^2 + |dy(v) + (SdS''(v) + aS''(z)) \frac{\partial}{\partial S''}|_{J'', (y(z), S''(z))}^2 \\ &= S \left[|dx(v) + (dS'(v) + \frac{a}{S} S'(z)) \frac{\partial}{\partial S'}|_{J', (x(z), S'(z))}^2 + |dy(v) + (dS''(v) + \frac{a}{S} S''(z)) \frac{\partial}{\partial S''}|_{J'', (y(z), S''(z))}^2 \right] \\ &= S |\Psi_{*|_{(z, 1)}}(v + \frac{a}{S} \frac{\partial}{\partial S})|_{J' \oplus J''}^2 = S |v + \frac{a}{S} \frac{\partial}{\partial S}|_{\tilde{J}, (z, 1)}^2 \end{aligned}$$

L'équivalence de g et \tilde{g} se réduit à leur équivalence sur le compact $\Sigma_I \times \{1\}$. Il existe donc une constante positive C telle que $|\cdot|_J \leq C|\cdot|_{\tilde{J}}$ sur $\Sigma_I \times [1, +\infty[$. On a aussi $S'(\Psi(z, S)) = SS'(z)$ et $S'(z) \in [1, \alpha]$. Soit alors $\epsilon > 0$ fixé. Posons $L_I(\epsilon) = L(\frac{\epsilon}{C\sqrt{\alpha}})$. Pour $S \geq L_I(\epsilon)$ on a

$$\frac{|X_{\tilde{H}} - X_{\tilde{F}}|_{J, (z, S)}}{\sqrt{S}} \leq \frac{C|X_{\tilde{H}} - X_{\tilde{F}}|_{\tilde{J}, (z, S)}}{\sqrt{\frac{S'(\Psi(z, S))}{\alpha}}} = C\sqrt{\alpha} \frac{|X_H - X_F|_{J', \Psi(z, S)}}{\sqrt{S'(\Psi(z, S))}} \leq \epsilon.$$

□

b) Asymptoticité sur $\Sigma_{III} \times [1, +\infty[$. Elle découle du fait que les métriques g et \tilde{g} sont équivalentes sur $T(\partial M \times [1, +\infty[) \subset T(\Sigma_{III} \times [1, +\infty[)$. En effet, la paramétrisation Ψ agit comme

$$(z = (x, \underline{y}), S) \mapsto ((x, S\alpha), \varphi''_{\ln S} \underline{y}).$$

Pour $v' \in T_x \partial M$ on a $\Psi_{*|_{(z, S)}} v' = v'|_{\Psi(z, S)}$ et donc $|v'|_{\tilde{J}, (z, S)}^2 = S\alpha |v'|_{J', (x, 1)}^2 = S\alpha |v'|_{J, (z, 1)}^2 = \alpha |v'|_{J, (z, S)}^2$. D'un autre côté $\Psi_{*|_{(z, S)}} \frac{\partial}{\partial S} = \alpha \frac{\partial}{\partial S'}|_{(x, S\alpha)} + \frac{1}{S} \eta''(\varphi''_{\ln S} \underline{y})$, d'où on tire

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial S}|_{J, (z, S)}^2 &= \frac{1}{S} \leq |\frac{\partial}{\partial S}|_{\tilde{J}, (z, S)}^2 = \alpha^2 \frac{1}{S\alpha} + \frac{1}{S^2} |\eta''(\varphi''_{\ln S} \underline{y})|_{J''}^2 \\ &\leq \frac{\alpha}{S} + \frac{A}{S^2} \leq \frac{A + \alpha}{S} = (A + \alpha) |\frac{\partial}{\partial S}|_{J, (z, S)}^2. \end{aligned}$$

où $A = \max\{1, \max_{\underline{y} \in N} |\eta''(\underline{y})|_{J''}^2\}$. En tout cas, on déduit $|\cdot|_J \leq \sqrt{\alpha} |\cdot|_{\tilde{J}}$ sur $T(\partial M \times [1, +\infty[)$. Soit alors $\epsilon > 0$ fixé. Posons $L_{III}(\epsilon) = L(\frac{\epsilon}{\alpha})$. Pour $S \geq L_{III}(\epsilon)$ on a

$$\frac{|X_{\tilde{H}} - X_{\tilde{F}}|_{J, (z, S)}}{\sqrt{S}} \leq \frac{\sqrt{\alpha} |X_{\tilde{H}} - X_{\tilde{F}}|_{\tilde{J}, (z, S)}}{\sqrt{S}} = \alpha \frac{|X_H - X_F|_{J', (x, S\alpha)}}{\sqrt{S\alpha}} \leq \epsilon.$$

□

c) L'asymptoticité linéaire de \tilde{H} sur $\Sigma_{II} \times [1, +\infty[$ n'est généralement pas vérifiée. Intuitivement, cela est même très plausible: il serait surprenant d'obtenir un comportement asymptotique raisonnable sans avoir imposé aucune condition sur le hamiltonien H à l'intérieur de la variété M . Cela est clarifié par la discussion ci-dessous.

Supposons qu'il y a une asymptote $\tilde{F}(z, S) = S \cdot \underline{f}(z)$, $z = (\underline{x}, (y, \beta)) \in \Sigma_{II} = M \times \partial N \times \{\beta\}$, $\underline{f} : \Sigma_{II} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Cela signifie l'existence, pour tout $\epsilon > 0$, d'une constante $L_{II}(\epsilon) > 0$ telle que

$$\frac{|X_{\tilde{H}} - X_{\tilde{F}}|_{J, (z, S)}}{\sqrt{S}} \leq \epsilon,$$

pour tout couple (z, S) avec $z \in \Sigma_{II}$ et $S \geq L_{II}(\epsilon)$. Or $\tilde{H}(z, S) = H(\varphi'_{\ln S} \underline{x})$ et $X_{\tilde{H}} = -\frac{1}{S} dH \cdot \eta'(\varphi'_{\ln S} \underline{x}) X_{\text{Reeb}}(z) + \frac{1}{S} (dH \circ (\varphi'_{\ln S})^*)^{\# \xi}$, où $\#_{\xi}$ désigne le champ dual d'une 1-forme par rapport à la restriction de la forme symplectique à la distribution de contact. D'un autre côté, $X_{\tilde{F}}(z, S) = -\underline{f}(z) X_{\text{Reeb}}(z) + S df|_z(X_{\text{Reeb}}(z)) \frac{\partial}{\partial S} + (df|_z)^{\# \xi}$. Ceci est une décomposition en facteurs orthogonaux de $X_{\tilde{F}}$ et la condition d'asymptoticité entraîne les faits suivants: (i) $\underline{f}(z)$, $z = (\underline{x}, (y, \beta))$ ne dépend que de $\underline{x} \in M$; (ii) $\underline{f}(\underline{x}) \rightarrow 0$ lorsque $S'(\underline{x}) \rightarrow 0$ et en particulier $\underline{f}(\underline{x}) = 0$ sur le "squelette isotrope" [B] de η' i.e. l'ensemble $\mathfrak{s}' = \{\underline{x} \in M : \varphi'_t(\underline{x}) \in M, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Cela découle en regardant la composante en X_{Reeb} de $X_{\tilde{H}}$ et $X_{\tilde{F}}$: la quantité $|\frac{1}{S} dH \cdot \eta'(\varphi'_{\ln S} \underline{x}) - \underline{f}(\underline{x})|$ doit tendre vers 0 avec S . Lorsque S est grand et $S'(\underline{x}) \leq \frac{1}{S}$ on a $\varphi'_{\ln S} \underline{x} \in \text{int}(M)$ et $dH \cdot \eta'(\varphi'_{\ln S} \underline{x})$ est borné, ce qui entraîne que $\underline{f}(\underline{x})$ est petit.

Comme \underline{f} doit prendre, par définition, des valeurs positives, on déduit que \mathfrak{s}' est un ensemble de minimum pour \underline{f} et donc $X_{\tilde{F}} = 0$ sur $\Psi^{-1}(\mathfrak{s}' \times \partial N \times \{\beta\})$. L'asymptoticité force alors $X_{\tilde{H}} = 0$ sur $\Psi^{-1}(\mathfrak{s}' \times \partial N \times \{\beta\})$ et H est forcément dégénéré le long de \mathfrak{s}' i.e. $dH|_{\mathfrak{s}'} = 0$. Cela montre déjà que, si l'on veut travailler avec des hamiltoniens qui sont des fonctions de Morse sur $\text{int}(M)$, l'asymptoticité linéaire n'est généralement pas vérifiée: il suffit de prendre un champ de Liouville avec un ensemble \mathfrak{s}' qui n'est pas discret. Les cotangents en boules unitaires $M = DT^*L$ fournissent une large classe d'exemples, avec $\mathfrak{s}' = L$.

Faisons une dernière observation avant de tirer les conclusions de cette section. Si l'on essaie de démontrer l'asymptoticité linéaire à la manière des points a) et b), la façon naturelle de s'y prendre serait de demander l'équivalence des métriques g et \tilde{g} sur $TM \subset T(\Sigma_{II} \times [1, \infty[)$. Cela reviendrait à prouver l'équivalence $|\varphi'_{\ln S} * v'|_{J', \varphi'_{\ln S} \underline{x}}^2 \sim S |v'|_{J', \underline{x}}^2$, $v' \in TM$, $S \geq 1$. Ceci est vrai pour le flot de Liouville standard dans \mathbb{C}^n , qui dilate uniformément les vecteurs et pas seulement les aires. Mais en fait cette condition en est presque à entraîner que M est une boule de \mathbb{C}^n ! En effet, en vue de $\varphi'_t * \eta' = \eta'$ on déduit que η' doit être nul sur le squelette. Maintenant, si \mathfrak{s}' était par exemple une sous-variété, le flot φ_t préserverait tout vecteur tangent à \mathfrak{s}' et la condition précédente le forcerait à être nul i.e. \mathfrak{s}' devrait être un ensemble discret de points, chacun ayant nécessairement un indice de Morse nul (ce sont des sources). Si des hypothèses de non-dégénérescence étaient vérifiées, la théorie de Morse dirait que M doit être homéomorphe à une union disjointe de boules de \mathbb{C}^n ! Dans le cas de \mathbb{C}^n , l'asymptoticité est vérifiée en prenant $\underline{f}(\underline{x}) = S'(\underline{x}) f(x)$, où $S'(\underline{x}) = |\underline{x}|^2$ et $x = \underline{x}/\sqrt{S'}$. Cette fonction est lisse précisément lorsque f est une forme quadratique: c'est le cadre de [FH1].

Remarques finales. Le lecteur aura observé le fait que, dans la preuve que nous avons présentée plus haut pour des ouverts RCT de \mathbb{C}^n , toutes ces complications concernant la forme du champ de Liouville ne sont pas intervenues, quoique la topologie des ouverts en question puisse être très compliquée (voir F. Laudénbach [L2]). Cela était dû au fait qu'on

a utilisé la définition *extrinsèque* de l'homologie de Floer [FH1], alors que toutes les considérations précédentes ont été faites en vue d'une utilisation de la définition *intrinsèque* que nous avons donnée au chapitre précédent, dans l'esprit de [V2]. La preuve de \mathbb{C}^n marchera verbatim uniquement dans le cas où l'intrinsèque et l'extrinsèque coïncident de façon tautologique : pour l'homologie de $B^{2n}(R) \subset \mathbb{C}^n$. C'est le sens des remarques précédentes. La preuve par D. Hermann [He2] du fait que, pour des ouverts de type contact restreint de \mathbb{C}^n , les deux versions de l'homologie de Floer coïncident peut constituer une motivation pour démontrer Künneth en homologie intrinsèque. C'est le but de la section qui suit.

2.4 Formule de Künneth pour des variétés RCT

2.4.1 Démonstration du théorème principal

Dans cette section l'homologie de Floer sera désormais entendue comme étant définie à travers des hamiltoniens asymptotiquement linéaires. Je présente la

Démonstration du théorème 2.1.2. C'est la première affirmation du théorème qui constitue le cœur de la démonstration. La deuxième affirmation - existence du morphisme vers la suite exacte de Künneth classique - s'ensuivra sans problème, comme nous allons le voir à la fin de notre argumentation.

(1) On peut supposer dès le début que les spectres des bords ∂M et ∂N sont discrets et injectifs i.e. les périodes des caractéristiques forment une suite croissante (non bornée), chaque période étant associée à une unique caractéristique. En effet, la propriété d'avoir un spectre discret et injectif est C^∞ -générique parmi les hypersurfaces [T], alors que l'homologie de Floer ne change pas par petite perturbation C^∞ (cf. Prop. 1.2.9).

Notre but est d'obtenir la suite fondamentale de morphismes de complexes (2.8) en remplaçant $H_n + K_n$ par un hamiltonien *admissible* L_n . Nous construirons des hamiltoniens *autonomes* ayant des orbites 1-périodiques transversalement non dégénérées dans le domaine d'action considéré. En vue de la technique de perturbation expliquée au chapitre précédent, cela ne pose pas problème et, pour définir l'homologie de Floer, il faudra penser à de petites perturbations au voisinage des orbites 1-périodiques. Ma démarche est la suivante :

a. Choisissons des suites cofinales $H_{\lambda_n}, K_{\lambda_n}$ sur \widehat{M} et \widehat{N} , linéaires de pente $\lambda_n \notin \text{Spectre}(\partial M) \cup \text{Spectre}(\partial N)$ i.e. des suites cofinales au sens de [V2]. Pour faciliter la lecture nous écrivons par la suite λ à la place de λ_n . Comme remarqué précédemment, la somme $H_\lambda + K_\lambda$ n'est pas un hamiltonien admissible sur $\widehat{M} \times \widehat{N}$. Nous allons le déformer en un hamiltonien linéaire hors d'un compact - donc asymptotiquement linéaire - en créant uniquement des orbites d'action très négative. L'homologie de Floer non tronquée est obtenue comme limite inductive d'homologies tronquées $FH_*^{[a,b]}$, avec $a < 0$ et $b \rightarrow \infty$. Les orbites nouvelles que nous allons créer n'entreront alors pas en compte dans le calcul de l'homologie tronquée, et cela fait que nous n'aurons même pas à nous préoccuper de leur dégénérescence - d'ailleurs très forte. On note par la suite

$$\eta_\lambda = \text{dist}(\lambda, \text{Spectre}(\partial M) \cup \text{Spectre}(\partial N)) > 0 ,$$

$$T_0(\partial M) = \min \text{Spectre}(\partial M) > 0 ,$$

$$T_0(\partial N) = \min \text{Spectre}(\partial N) > 0 ,$$

$$T_0 = \min (T_0(\partial M), T_0(\partial N)) .$$

b. Mon point de départ est la construction par [He2] d'une famille cofinale qui permet d'identifier pour des ouverts à bord de type contact restreint dans \mathbb{C}^n les homologies de Floer au sens de [FH1] et [V2]. Pour $A = A(\lambda) > 1$ choisi convenablement, je considère le hamiltonien H_λ^A égal à H_λ pour $S' \leq A - \epsilon(\lambda)$ et constant égal à $C \sim \lambda(A - 1)$ pour $S' \geq A$. Ici $\epsilon(\lambda)$ est choisi suffisamment petit et positif. Comme nous le verrons par la suite, si A est suffisamment grand par rapport à λ , les orbites nouvelles de H_λ^A par rapport à H_λ ont une action très négative. On fait la même construction pour obtenir K_λ^A . Un choix qui conviendra est

$$(2.14) \quad A = 5\lambda/\eta_\lambda .$$

On suppose (Figure 2.2 (1)) que H_λ^A prend ses valeurs dans $[-\epsilon, 0]$ à l'intérieur de M et que $H_\lambda^A(\underline{x}, S') = h(S')$ sur $\partial M \times [1, \infty[$, avec $h' = \lambda$ sur $[1 + \epsilon(\lambda), A - \epsilon(\lambda)]$ et $h' = 0$ sur $[A, \infty[$, où $\epsilon(\lambda) = \epsilon/\lambda$. Ainsi H_λ^A prend des valeurs dans $[-\epsilon, \epsilon]$ pour $S' \in [1, 1 + \epsilon(\lambda)]$, respectivement dans $[\lambda(A - 1) - 2\epsilon, \lambda(A - 1)]$ pour $S' \in [A - \epsilon(\lambda), A]$.

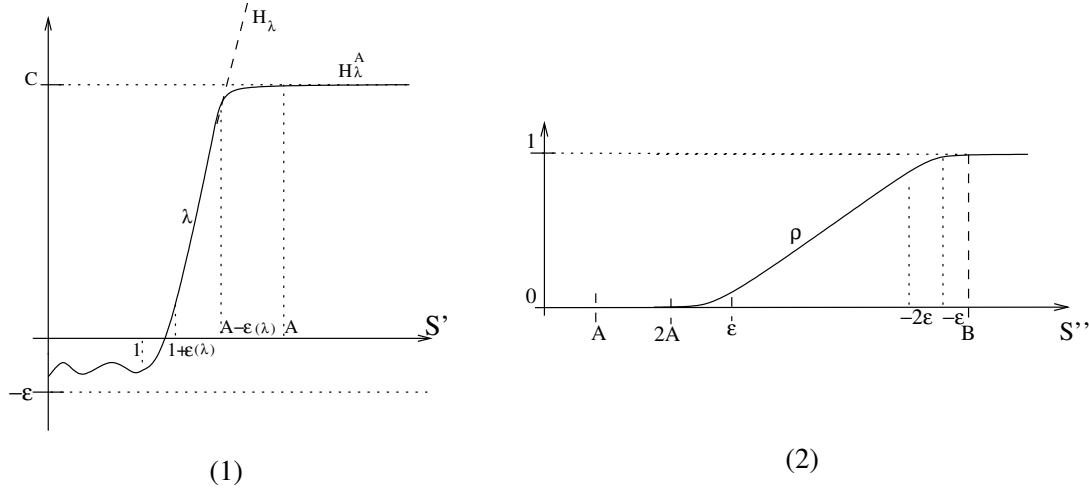


Fig. 2.2: Le hamiltonien H_λ^A et la fonction de troncature ρ

Noter que les orbites nouvelles qu'on crée apparaissent sur des niveaux $S = \text{const.}$ proches de A et ont comme action $h'(S)S - h(S) \leq (\lambda - \eta_\lambda) \cdot A - \lambda(A - 1) + 2\epsilon \leq -3\lambda \rightarrow -\infty, \lambda \rightarrow \infty$.

c. Modifions maintenant $H_\lambda^A + K_\lambda^A$ de façon à le rendre constant hors d'un grand compact. Déjà il est constant égal à $2C$ dans $\{S' \geq A, S'' \geq A\}$. Nous allons rendre $H = H_\lambda^A$ constant égal à C hors d'un compact de $\widehat{M} \times \partial N \times [A, +\infty[$. On considère

$$H_1 : \widehat{M} \times \partial N \times [A, \infty[\rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$H_1(\underline{x}, y, S'') = (1 - \rho(S''))H(\underline{x}) + \rho(S'')C ,$$

avec $\rho : [A, +\infty[\rightarrow [0, 1]$, $\rho \equiv 0$ sur $[A, 2A]$, $\rho \equiv 1$ pour $S'' \geq B - \epsilon$, ρ strictement croissante sur $[2A, B - \epsilon]$, $\rho' \equiv \text{const.} \in [\frac{1}{B-2A-\epsilon}, \frac{1}{B-2A-3\epsilon}]$ sur $[2A + \epsilon, B - 2\epsilon]$ (Figure 2.2 (2)), avec

B un paramètre convenablement choisi plus bas. La forme symplectique sur $\widehat{M} \times \partial N \times [A, \infty[$ est $\omega' \oplus d(S''\lambda'')$, où λ'' est la forme de contact sur ∂N . Après calcul on obtient

$$X_{H_1}(\underline{x}, y, S'') = (1 - \rho(S''))X_H(\underline{x}) - (C - H(\underline{x}))\rho'(S'')X''_{\text{Reeb}}(y) .$$

La projection d'une orbite périodique de X_{H_1} sur \widehat{M} est une orbite périodique de X_H . En

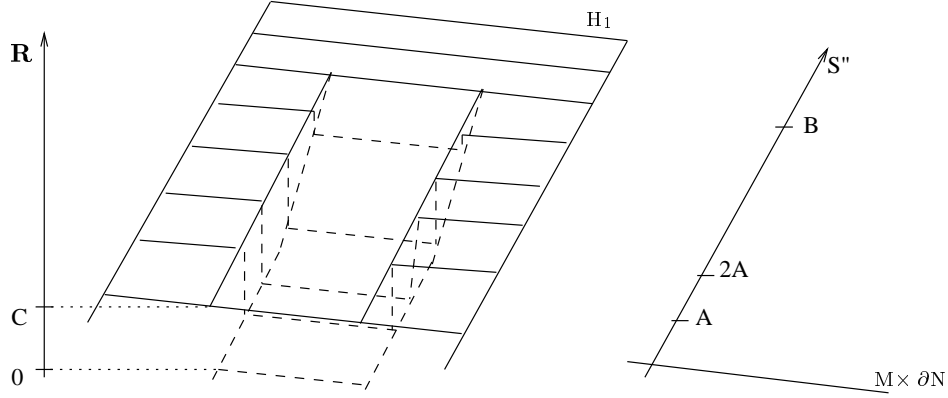


Fig. 2.3: Graphe de la déformation H_1

particulier, H est constant le long de la projection. De plus, comme il n'y a pas de composante $\frac{\partial}{\partial S''}$ dans X_{H_1} , les orbites sont contenues dans des niveaux $S'' = \text{const}$. Ainsi, les coefficients devant X_H et X''_{Reeb} sont constants le long d'une orbite de X_{H_1} . Une orbite θ de période 1 pour X_{H_1} correspond alors à un couple (Γ, γ) tel que

- Γ est une orbite de période $1 - \rho(S'')$ de X_H ;
- γ est une caractéristique fermée sur le niveau $\partial N \times \{S''\}$, de période $(C - H(\underline{x}))\rho'(S'')$ et orientée dans le *sens inverse* à X_{Reeb} . Nous avons noté ici $\underline{x} = \Gamma(0)$ et cela sera sous-entendu par la suite.

L'action totale de θ est alors

$$\begin{aligned} A_{H_1+K}(\theta) &= -A(\Gamma) - A(\gamma) - H_1 - K \\ (2.15) \quad &= A_H(\Gamma) - A(\gamma) - \rho(S'')(C - H(\underline{x})) - C \end{aligned}$$

Nous avons noté ci-dessus $A(\gamma)$, $A(\Gamma)$ les aires des orbites γ et Γ respectivement. Le hamiltonien K est constant dans la zone respective et nous l'avons directement remplacé par sa valeur C . Il est utile pour la suite de remarquer le fait que $A(\gamma) = -S''\rho'(S'')(C - H(\underline{x}))$. Le signe négatif provient du fait que le sens de parcours sur γ est opposé à celui donné par le champ de Reeb et l'expression découle directement de ce que la forme symplectique sur le deuxième facteur est $d(S''\lambda'')$.

Pour $0 \leq T = 1 - \rho(S'') \leq 1$, les orbites T -périodiques de X_H appartiennent à l'une des classes suivantes.

1. constantes d'aire nulle à l'intérieur de M ;

2. caractéristiques fermées d'aire comprise dans l'intervalle $[T_0(\partial M), T\lambda]$, localisées autour de $S' = 1$;
3. si $T\lambda \in \text{Spectre}(\partial M)$, pour tout $S' \in [1 + \epsilon(\lambda), A - \epsilon(\lambda)]$ - l'intervalle où H est linéaire de pente λ - on a une caractéristique fermée d'aire $S'T\lambda$;
4. caractéristiques fermées d'aire comprise dans l'intervalle $[T_0, T(\lambda - \eta_\lambda)A]$, localisées autour de $S' = A$;
5. constantes d'aire nulle sur $S' \geq A$.

Faisons le choix suivant pour le paramètre B :

$$(2.16) \quad B = A\sqrt{\lambda}.$$

Les différentes autres quantités impliquées dans nos constructions ont les équivalents suivants :

$$\begin{aligned} C &\sim \lambda A, & \rho' &\sim 1/A(\sqrt{\lambda} - 1), \\ S'' \sim B &\implies \rho'(S'') \cdot S'' &\leq \sqrt{\lambda}/(\sqrt{\lambda} - 1). \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que l'action totale des orbites 1-périodiques de X_{H_1} situées dans $\widehat{M} \times \partial N \times [A, \infty[$ tend uniformément vers $-\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Nous allons estimer l'action des orbites θ selon que leur première composante Γ est de l'un des types 1 à 5 ci-dessus. Dans ce qui suit, les convergences sont considérées par rapport à $\lambda \rightarrow \infty$.

1. Γ du type 1 correspond à $H \in [-\epsilon, 0]$. La deuxième composante γ vit sur un niveau S'' constant et nous étudions l'action totale de $\theta = (\Gamma, \gamma)$ selon la valeur $S'' \geq A$.
 - a) $S'' \in [A, 2A] \cup [B - \epsilon(\lambda), \infty[$. Vu que $\rho' = 0$ il n'y a pas de composante X_{Reeb} dans X_{H_1} et les orbites Γ apparaissent en familles dégénérées (de la dimension de N) et l'action totale de θ est $A_{H_1+K}(\theta) \leq \epsilon - C \rightarrow -\infty$.
 - b) $S'' \in [2A, \frac{A+B}{2}]$. Les orbites Γ vont coupler avec des caractéristiques fermées γ de période $\rho'(C - H(\underline{x}))$ sur $\partial N \times \{S''\}$. L'action totale d'une telle $\theta = (\Gamma, \gamma)$ est

$$\begin{aligned} A_{H_1+K}(\theta) &\leq \epsilon + S''\rho'(S'')(C + \epsilon) - C \\ &\leq \epsilon + \frac{A+B}{2} \cdot \frac{1}{B - 2A - 3\epsilon} \cdot (C + \epsilon) - C \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (C + \epsilon) - C \leq 2\epsilon - \frac{1}{4}C \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité est valable pour λ suffisamment grand, tenant compte du fait que $B = \sqrt{\lambda}A$ et donc $(B + A)/(B - 2A - 3\epsilon) \rightarrow 1$.

- c) $S'' \in [\frac{A+B}{2}, B - \epsilon(\lambda)]$. On a $\rho \in [\frac{1}{2}, 1]$ et, pour λ grand :

$$\begin{aligned} A_{H_1+K}(\theta) &\leq \epsilon + S''\rho'(S'')(C + \epsilon) - \rho(S'')C - C \\ &\leq \epsilon + \frac{B - \epsilon}{B - 2A - 3\epsilon} \cdot (C + \epsilon) - \frac{1}{2} \cdot C - C \\ &\leq \epsilon + \frac{5}{4} \cdot C - \frac{3}{2} \cdot C \leq \epsilon - \frac{1}{4}C \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

2. Γ du type 2 correspond à $H \in [-\epsilon, \epsilon]$ et $S' \in [1, 1 + \epsilon(\lambda)]$. L'aire de Γ est comprise dans $[T_0, (1 - \rho(S''))\lambda]$. De nouveau, nous étudions l'action de $\theta = (\Gamma, \gamma)$ selon la valeur du niveau $S'' \geq A$ sur lequel vit la deuxième composante γ .

- a) $S'' \in [A, 2A] \cup [B - \epsilon(\lambda), \infty[$. Comme dans 1a, les orbites θ apparaissent en familles, et leur action totale est

$$A_{H_1+K}(\theta) \leq \epsilon + (1 - \rho(S''))\lambda - C \leq \epsilon + \lambda - C \longrightarrow -\infty.$$

- b) $S'' \in [2A, \frac{A+B}{2}]$. Comme dans 1b, l'action totale de θ est

$$A_{H_1+K}(\theta) \leq \epsilon + (1 - \rho(S''))\lambda + S''\rho'(S'')(C + \epsilon) - C \leq 2\epsilon + \lambda - \frac{1}{4}C \longrightarrow -\infty.$$

- c) $S'' \in [\frac{A+B}{2}, B - \epsilon(\lambda)]$. Comme dans 1c, on a

$$\begin{aligned} A_{H_1+K}(\theta) &\leq \epsilon + (1 - \rho(S''))\lambda + S''\rho'(S'')(C + \epsilon) - \rho(S'')C - C \\ &\leq \epsilon + \lambda - \frac{1}{4}C \longrightarrow -\infty. \end{aligned}$$

3. Γ du type 3 a une action $A_H(\Gamma) \leq S'T\lambda - \lambda(S' - 1 - \epsilon') \leq (1 + \epsilon')\lambda$, où $\epsilon' = \epsilon(\lambda)$. L'action d'une orbite θ ayant Γ comme première composante est, respectivement :

- a) $S'' \in [A, 2A] \cup [B - \epsilon(\lambda), \infty[$: $A_{H_1+K}(\theta) \leq (1 + \epsilon')\lambda - C \longrightarrow -\infty$.
b) $S'' \in [2A, \frac{A+B}{2}]$: $A_{H_1+K}(\theta) \leq (1 + \epsilon')\lambda + \epsilon - \frac{1}{4}C \longrightarrow -\infty$.
c) $S'' \in [\frac{A+B}{2}, B - \epsilon(\lambda)]$. La technique de majoration de 1c ne s'applique plus directement, vu que $C - H(\underline{x})$ peut être arbitrairement proche de 0. Remarquons pourtant que ρ vérifie par construction

$$(S'' - 2A)\rho'(S'') \leq \rho(S'') + \epsilon$$

et on obtient

$$\begin{aligned} A_{H_1+K}(\theta) &\leq (1 + \epsilon')\lambda + S''\rho'(S'')(C - H(\underline{x})) - \rho(S'')(C - H(\underline{x})) - C \\ &\leq (1 + \epsilon')\lambda + \frac{2A}{B - 2A - 3\epsilon}(C + \epsilon) + \epsilon(C + \epsilon) - C \\ &\leq 2\lambda - \frac{1}{2}C \longrightarrow -\infty. \end{aligned}$$

4. Γ du type 4 correspond à $H \in [C - \epsilon, C]$ et $A_H(\Gamma) \leq (1 - \rho(S''))\lambda A - \lambda(A - 1) \leq \lambda$ (en fait, $A_H(\Gamma)$ tend vers $-\infty$, mais nous n'avons pas besoin d'un contrôle si fort). L'action totale de θ est respectivement

- a) $A_{H_1+K}(\theta) \leq \lambda - C \longrightarrow -\infty$;
b) $A_{H_1+K}(\theta) \leq \lambda - \frac{1}{4}C \longrightarrow -\infty$;
c) $A_{H_1+K}(\theta) \leq 2\lambda - \frac{1}{2}C \longrightarrow -\infty$.

5. Γ du type 5 correspond à $H \equiv C$. Comme dans 1a la composante en X_{Reeb} de X_{H_1} s'annule et donc Γ apparaît en familles dégénérées. L'action totale dans les trois cas a-c est $A_{H_1+K}(\theta) = -C - C = -2C \longrightarrow -\infty$.

Cela achève de montrer que les orbites nouvelles créées au cours de la déformation H_1 (Figure 2.3) ont une action très négative. Comme nous le verrons plus bas, la conséquence est qu'elles n'entreront pas en compte dans le calcul de la cohomologie de Floer du produit $\widehat{M} \times \widehat{N}$.

d. En faisant la même construction pour K sur le domaine $\partial M \times [A, \infty[\times \widehat{N}$ on construit un hamiltonien $H_1 + K_1$ qui est constant égal à $2C$ sur $\{S' \geq B\} \cup \{S'' \geq B\}$. Nous allons modifier maintenant $H_1 + K_1$ en dehors du compact $\{S' \leq B\} \cap \{S'' \leq B\}$ de façon à le rendre linéaire par rapport au champ de Liouville $\eta = \eta' \oplus \eta''$ sur $\widehat{M} \times \widehat{N}$. On choisit (Figure 2.1) comme dans la section 2.3 une hypersurface $\Sigma \subset \widehat{M} \times \widehat{N}$ transverse à η telle que

$$\begin{aligned} S'_{|\Sigma \cap \text{III}} &\equiv \alpha > 1, & S'_{|\Sigma \cap \text{I}} &\in [1, \alpha], \\ S''_{|\Sigma \cap \text{II}} &\equiv \beta > 1, & S''_{|\Sigma \cap \text{I}} &\in [1, \beta]. \end{aligned}$$

On paramètre $\widehat{M} \times \widehat{N} \setminus \text{int}(\Sigma)$ par

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma \times [1, +\infty[&\longrightarrow \widehat{M} \times \widehat{N} \setminus \text{int}(\Sigma), \\ (z, S) &\longmapsto (\varphi'_{\text{in } S}(z), \varphi''_{\text{in } S}(z)), \end{aligned}$$

qui est un symplectomorphisme si l'on munit $\Sigma \times [1, +\infty[$ de la forme symplectique $d(S \cdot \lambda|_{\Sigma})$. A titre d'exemple, pour $z \in \Sigma \cap \text{III}$ on a $\varphi'_{\text{in } S}(z) = (x(z), S\alpha)$. On voit facilement que

$$(2.17) \quad \Psi^{-1}(\{S' \geq B\} \cup \{S'' \geq B\}) \supseteq \{S \geq B\}.$$

En conséquence $H_1 + K_1$ est constant égal à $2C$ sur $\{S \geq B\}$. On le transforme de la façon habituelle en un hamiltonien $L = l(S)$ sur $\{S \geq B\}$, avec l convexe et $l'(S) = \mu \notin \text{Spectre}(\Sigma)$ pour $S \geq B + \epsilon$. On crée de cette façon des orbites de période 1 dont l'action est

$$A_L \leq \mu(B + \epsilon) - 2C = \mu(\sqrt{\lambda}A + \epsilon) - 2\lambda(A - 1).$$

En choisissant $\mu = \sqrt{\lambda}$ on assure $A_L \longrightarrow -\infty$, ainsi que la cofinalité de la suite de hamiltoniens qu'on vient de construire: en effet, le hamiltonien L est plus grand que $(\sqrt{\lambda} - \epsilon)(S - 1)$ sur $\Sigma \times [1, \infty[$. Notons que le choix de μ égal à $\sqrt{\lambda}$ et n'appartenant pas au spectre de Σ est rendu possible en prenant pour Σ une hypersurface à spectre injectif.

e. On vient de construire une suite cofinale de hamiltoniens asymptotiquement linéaires $(L_n)_{n \geq 1}$ qui est associée aux deux suites cofinales de départ (H_n) et (K_n) . J'affirme que, pour $b > 0$ fixé, l'inclusion fondamentale de complexes (2.8) est toujours valable en remplaçant $H_n + K_n$ avec L_n :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{r+s=k} FC_r^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(H_n, J_n^1) \otimes FC_s^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(K_n, J_n^2) &\rightarrow FC_k^{[-\delta, b]}(L_n, J_n) \rightarrow \bigoplus_{r+s=k} FC_r^{[-\delta, 2b]}(H_n, J_n^1) \otimes FC_s^{[-\delta, 2b]}(K_n, J_n^2) \\ (2.18) \qquad \qquad \qquad &\rightarrow FC_k^{[-\delta, 4b]}(L_n, J_n), \end{aligned}$$

où J_n^1 , J_n^2 et J_n représentent des structures presque complexes régulières pour H_n , K_n et L_n , standard pour $S' \geq 1 + \epsilon$, $S'' \geq 1 + \epsilon$ et $S \geq 1$ respectivement, telles que $J_n = J_n^1 \oplus J_n^2$ pour $S \leq 1$. Les estimations précédentes sur l'action des caractéristiques montrent qu'on a des inclusions (2.18) valables au niveau des espaces vectoriels. Cela entraîne en particulier le fait que les orbites périodiques impliquées dans (2.18) sont situées au voisinage de M , N et

respectivement $M \times N$, disons dans $\{S \leq 1\}$ pour un choix convenable de Σ . Le résultat de transversalité mentionné dans la section 2.2 ([FH1], Prop. 17; [FHS], 5.1 et 5.4) assure qu'on peut effectivement choisir des structures presque complexes régulières comme ci-dessus. Nous allons montrer que les inclusions (2.18) sont valables au niveau des complexes différentiels en utilisant une estimation d'énergie qui s'inspire de [He2].

Il suffit de montrer que toute trajectoire de Floer $u = (v, w) : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \widehat{M} \times \widehat{N}$ telle que $u(s, \cdot) \longrightarrow (x^\pm, y^\pm)$, $s \longrightarrow \pm\infty$ reste dans le domaine $\{S \leq 1\}$. L'équation de Floer étant découplée dans $\{S \leq 1\}$ il s'ensuivra que v et w sont des trajectoires de Floer dans \widehat{M} et \widehat{N} respectivement, ce qui démontrerait (2.18) au niveau des complexes différentiels. Il suffit de démontrer cette affirmation lorsque $J_n = J_n^1 \oplus J_n^2$ sur $\widehat{M} \times \widehat{N}$ tout entier : les trajectoires de Floer qui nous intéressent seraient de toutes façons contenues a-posteriori dans $\{S \leq 1\}$, ce qui permet de modifier J_n à l'extérieur de $\{S \leq 1\}$ pour travailler formellement avec une structure standard à l'infini.

On suppose donc par la suite que $J_n = J_n^1 \oplus J_n^2$. Supposons que la trajectoire u n'est pas contenue dans $\{S \leq 1\}$. Comme u est contenue dans un compact, on déduit que $S \circ u$ a un maximum local dans $\{S > 1\}$, ou encore l'une des fonctions $S' \circ v$ ou $S'' \circ w$ a un maximum local dans $\{S' > 1 + \epsilon\}$, respectivement $\{S'' > 1 + \epsilon\}$. Les deux situations sont symétriques et l'on peut supposer sans perte de généralité que c'est $S'' \circ w$ qui a un maximum local dans $\{S'' > 1 + \epsilon\}$. Vu que w vérifie l'équation de Floer associée à K_n lorsque $S'' \leq 2A$ et $S'' \geq B$, il s'ensuit par le lemme 1.1.5 que le maximum ne peut être atteint que pour $S'' \circ w \in]2A, B[$. Comme $w(s, \cdot) \rightarrow y^\pm$, $s \rightarrow \pm\infty$ avec $y^\pm \in \{S'' \leq 1 + \epsilon\}$ on déduit que w rencontre les hypersurfaces $\{S'' = A\}$ et $\{S'' = 2A\}$. De plus, le bout de w contenu dans $\{A \leq S'' \leq 2A\}$ est J_n^2 -holomorphe puisque K_λ^A est constant.

On obtient alors

$$\begin{aligned} A_{L_n}(x^-, y^-) - A_{L_n}(x^+, y^+) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |(v_s, w_s)|_{J_n^1 \oplus J_n^2}^2 = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |v_s|_{J_n^1}^2 + |w_s|_{J_n^2}^2 \geq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |w_s|_{J_n^2}^2 \\ (2.19) \quad &\geq \int_{[(s, t) : w(s, t) \in \{A \leq S'' \leq 2A\}]} |w_s|_{J_n^2}^2 = \text{Aire}(w \cap \{A \leq S'' \leq 2A\}) . \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise le fait que, pour une courbe J_n^2 -holomorphe w on a $|w_s|^2 = \omega(w_s, J_n^2 w_s) = \omega(w_s, w_t)$. Le lemme qui suit nous permettra de conclure. Il s'inspire de [He2], où l'on en trouve une formulation pour $\widehat{N} = \mathbb{C}^n$.

Lemme 2.4.1. *Soit \widehat{N} une variété admissible et Σ une hypersurface qui trivialise par le flot de Liouville un voisinage de l'infini. Soit J une structure presque complexe standard sur $\{S \geq 1\}$. Il existe une constante $C(J) > 0$ telle que, pour tout $A \geq 1$ et toute courbe J -holomorphe à bord qui s'appuie à la fois sur $\Sigma \times \{A\}$ et $\Sigma \times \{2A\}$, on ait*

$$(2.20) \quad \text{Aire}(u) \geq C(J)A .$$

Démonstration. Le point clé de la preuve est le fait que, pour tout $A \geq 1$, la dilatation

$$\begin{aligned} \Sigma \times [1, \infty[&\xrightarrow{h_A} \Sigma \times [1, \infty[, \\ (p, S) &\longmapsto (p, AS), \quad A \geq 1 \end{aligned}$$

est une application J -holomorphe si J est standard sur $\Sigma \times [1, \infty[$. Par exemple $h_{A*}|_{(p, S)}(JX_{\text{Reeb}}(p)) = h_{A*}|_{(p, S)}(-S\frac{\partial}{\partial S}) = -SA\frac{\partial}{\partial S} = J|_{(p, AS)}X_{\text{Reeb}}(p)$. La propriété

d'homogénéité vérifiée par la métrique g_J entraîne que h_A dilate de A les aires et il suffit alors de montrer que l'inégalité (2.20) est vérifiée lorsque $A = 1$. Le lemme de monotonie de Gromov [G] 1.5.B, [Mu] 4.2.1, [Sik] 4.3.1 affirme qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et une constante $c(\epsilon_0, J)$ tels que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ et tout $x \in \Sigma \times [1, 2]$ avec $B(x, \epsilon) \subset \Sigma \times [1, 2]$, on ait

$$\text{Aire}(u \cap B(X, \epsilon)) \geq c(\epsilon_0, J)\epsilon^2.$$

On fixe ϵ suffisamment petit pour que $B(x, \epsilon) \subset \Sigma \times [1, 2]$ pour tout $x \in \Sigma \times \{\frac{3}{2}\}$. Comme u s'appuie à la fois sur $\Sigma \times \{1\}$ et $\Sigma \times \{2\}$ il existe forcément un tel x sur l'image de u . On en déduit $\text{Aire}(u) \geq \text{Aire}(u \cap B(x, \epsilon)) \geq c(\epsilon_0, J)\epsilon^2$. Cela achève la preuve du lemme, en posant $C(J) = c(\epsilon_0, J)\epsilon^2$. \square

Appliquons le lemme 2.4.1 à notre situation. On déduit l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $\text{Aire}(w \cap \{A \leq S'' \leq 2A\}) \geq cA \geq C\lambda$. Par contre, la différence des actions dans (2.19) est bornée par $4b$ et on obtient une contradiction lorsque λ est suffisamment grand.

Par conséquent les trajectoires de Floer correspondant à L_n sont contenues dans $\{S \leq 1\}$ pour λ suffisamment grand et on a démontré l'inclusion (2.18) au niveau des complexes différentiels. Comme dans la section 2.2 on a les diagrammes commutatifs (2.9 - 2.11) et on aboutit à la suite exacte de Künneth (2.1). Noter qu'on utilise de manière cruciale l'exactitude du foncteur de limite inductive pour obtenir la suite exacte (2.11) à partir de la suite exacte de Künneth en homologie tronquée. La première partie du théorème 2.1.2 est démontrée.

(2) En restreignant le domaine de l'action à $[-\delta, 0^+]$ et en utilisant le fait que, pour un hamiltonien C^2 -petit et autonome, les trajectoires de Floer coïncident avec les trajectoires du complexe Thom-Smale-Witten, on obtient à partir de (2.18) le diagramme commutatif suivant de complexes différentiels :

$$(2.21) \quad \begin{array}{ccc} \bigoplus_{r+s=k} FC_r^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(H_n, J_n^1) \otimes FC_s^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(K_n, J_n^2) & \subseteq & FC_k^{[-\delta, b]}(L_n, J_n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{r+s=k} C_{m+r}^{\text{Morse}}(M, \partial M; H_n, g_{J_n^1}) \otimes C_{n+s}^{\text{Morse}}(N, \partial N; K_n, g_{J_n^2}) & = & C_{m+n+k}^{\text{Morse}}(M \times N, \partial(M \times N); L_n, g_{J_n^1 \oplus J_n^2}) \end{array}$$

qui fournit en homologie le diagramme commutatif :

$$(2.22) \quad \begin{array}{ccc} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ b}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n}} H_k(FC_*^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(H_n, J_n^1) \otimes FC_*^{[-\delta, \frac{b}{2}]}(K_n, J_n^2)) & \xrightarrow{\sim} & FH_k(M \times N) \\ \uparrow \phi & & \uparrow c_* \\ H_{m+n+k}(C_{m+*}(M, \partial M) \otimes C_{n+*}(N, \partial N)) & \xrightarrow{\sim} & H_{m+n+k}(M \times N, \partial(M \times N)) \end{array}$$

Mais, par functorialité de la suite exacte de Künneth homologique, le morphisme ϕ s'insère dans le diagramme commutatif

$$(2.23) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r+s=k} FH_r(M) \otimes FH_s(N) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \widetilde{\text{Tor}}_{1, k-1}(FH) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow c_* \otimes c_* & & \uparrow \phi & & \uparrow \text{Tor}(c_*) \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{r+s=k} H_{m+r}(M, \partial M) \otimes H_{n+s}(N, \partial N) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \widetilde{\text{Tor}}_{1, m+n+k-1}(H) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $*$ désigne le but et la source de ϕ . Les diagrammes (2.22 - 2.23) démontrent (2.2). \square

Démonstration du théorème 2.1.3. La preuve du théorème découle selon exactement les mêmes lignes que la précédente en renversant les flèches, à l'exception de la dernière étape du point (1): nous avons utilisé de manière cruciale l'exactitude du foncteur de limite inductive pour déduire la suite exacte de Künneth obtenue en passant à la limite dans (2.11) à partir des suites exactes en homologie tronquée, obtenues avec la formule de Künneth algébrique habituelle.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, il faut se placer dans un cadre où la limite projective est un foncteur exact, à savoir celui des espaces vectoriels de dimension finie. Si l'on travaille à coefficients dans un corps, le terme de torsion dans la suite exacte de Künneth en homologie tronquée disparaît

$$\bigoplus_{r+s=k} FH_{]-\delta, b]}^r(H_n, J_n^2) \otimes FH_{]-\delta, b]}^s(K_n, J_n^2) \xrightarrow{\sim} H^k(FC_{]-\delta, b]}^*(H_n, J_n^1) \otimes FC_{]-\delta, b]}^*(K_n, J_n^2))$$

et, en passant à la limite projective, on obtient l'identité cruciale

$$\bigoplus_{r+s=k} FH^r(M) \otimes FH^s(N) \xrightarrow{\sim} \lim_{\leftarrow b} \lim_{\leftarrow n} H^k(FC_{]-\delta, b]}^*(H_n, J_n^1) \otimes FC_{]-\delta, b]}^*(K_n, J_n^2))$$

qui entraîne la formule de Künneth

$$\bigoplus_{r+s=k} FH^r(M) \otimes FH^s(N) \xrightarrow{\sim} FH^k(M \times N) .$$

La compatibilité avec le morphisme c^* est démontrée de la même manière que pour le théorème précédent. \square

2.4.2 Applications

Je donne ci-dessous deux applications de la suite exacte de Künneth: l'une porte sur l'existence d'orbites périodiques sur des hypersurfaces de type contact restreint, l'autre porte sur le calcul de la capacité d'un produit de variété à bord de type contact restreint.

Existence d'orbites périodiques. Je donne ici quelques applications directes de la suite exacte de Künneth pour ce qui est de l'existence d'orbites périodiques.

Proposition 2.4.2. *Soit M une variété compacte à bord de type contact restreint. Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$FH^*(M \times D^{2n}) = 0 ,$$

où D^{2n} désigne une boule dans \mathbb{C}^n .

Démonstration. La première affirmation du théorème 2.1.3 et l'égalité $FH^*(D^{2n}) = 0$ fournissent directement le résultat. \square

Proposition 2.4.3. *Soit N une variété compacte à bord de type contact restreint qui satisfait au cas b) de la conjecture de Weinstein algébrique (AWC b) (cf. Définition 1.1.9 sqq.) i.e. le morphisme*

$$(2.24) \quad FH^n(N) \xrightarrow{c^*} H^{2n}(N, \partial N)$$

n'est pas surjectif, où $2n = \dim N$. Pour toute variété M compacte à bord de type contact restreint, le produit $\widehat{M} \times \widehat{N}$ vérifie encore AWC b) i.e. le morphisme

$$(2.25) \quad FH^{m+n}(\widehat{M} \times \widehat{N}) \xrightarrow{c^*} H^{2m+2n}(M \times N, \partial(M \times N))$$

n'est pas surjectif, où $2m = \dim M$.

Démonstration. Quoique la définition 1.1.9 est formulée en termes d'existence d'un anneau de coefficients pour lequel le morphisme (2.24) n'est pas surjectif, on peut supposer par le théorème des coefficients universels que cela est vrai à coefficients dans un corps. On applique alors le diagramme commutatif donné par la deuxième partie du théorème 2.1.3, ainsi que l'isomorphisme $H^{2m}(M, \partial M) \otimes H^{2n}(N, \partial N) \longrightarrow H^{2m+2n}(M \times N, \partial(M \times N))$ donné par la formule de Künneth en cohomologie singulière à coefficients dans un corps, pour déduire que le morphisme (2.25) est aussi non surjectif. □

Remarque. Le théorème doit être interprété comme une propriété de stabilité vérifiée par la condition AWC b). Il s'applique en particulier aux variétés \widehat{N} de Stein sous-critiques (cf. Proposition 1.1.10). On déduit le résultat suivant :

Corollaire 2.4.4. *Soit \widehat{M} une variété admissible de type contact restreint et \widehat{N} une variété de Stein sous-critique. Toute hypersurface compacte de type contact restreint $H \subset \widehat{M} \times \widehat{N}$ admet une caractéristique fermée.*

Un résultat similaire est démontré par H. Hofer et C. Viterbo [HV] pour des hypersurfaces de type contact (pas nécessairement restreint) dans un produit $P \times \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ avec P une variété symplectique fermée.

Noter le fait qu'une version de la formule de Künneth en cohomologie de Floer équivariante (que nous n'avons pas discuté dans cette thèse) permettrait d'obtenir la conclusion du corollaire pour des produits $P \times T^*M$, sous l'hypothèse $\pi_1(M) = 0$ (cf. [V2]). Ceci est un projet en cours.

Calcul de capacités. On travaille dans ce paragraphe à coefficients dans un corps. La capacité d'une variété M compacte de dimension $2m$ à bord de type contact est définie ici comme

$$c(M) = \inf\{\lambda > 0 : FH_{[-\delta, \lambda]}^m(M) \longrightarrow H^{2m}(M, \partial M) \text{ nulle} \} ,$$

où $\delta > 0$ est suffisamment petit. Nous avons alors le résultat suivant, qui a été mis au point en collaboration avec Anne-Laure Biolley. Elle l'applique dans sa thèse [Bi] à des questions d'hyperbolicité symplectique.

Proposition 2.4.5. *Soient M, N des variétés à bord de type contact restreint. On a*

$$c(M \times N) \leq \min(c(M), c(N)) .$$

Démonstration. Par l'analyse des orbites périodiques des hamiltoniens modifiés L_n , pour tout $\lambda > 0$ l'application composée

$$\bigoplus_{r+s=m+n} FH_{[-\delta, \lambda]}^r(M) \otimes FH_{[-\delta, \lambda]}^s(N) \longrightarrow FH_{[-\delta, 2\lambda]}^{m+n}(M \times N) \longrightarrow FH_{[-\delta, \lambda]}^{m+n}(M \times N)$$

est surjective (en fait elle l'est même au niveau des complexes). La commutativité du diagramme (2.4) est valable aussi en cohomologie tronquée et entraîne le résultat, tenant compte du fait que la flèche du bas est un isomorphisme.

□

3. LA SUITE SPECTRALE DE LERAY-SERRE EN COHOMOLOGIE DE MORSE

3.1 Introduction

L'étude des fonctions lisses à points critiques non dégénérés est un outil fondamental en topologie différentielle. La théorie de Morse classique, basée sur le lemme de Morse [Mil], décrit la structure locale d'une fonction autour de ses points critiques non dégénérés, ainsi que le changement de topologie de la variété après franchissement des niveaux critiques correspondants. Comme conséquence, elle offre la plus simple preuve des inégalités de Morse. Toutefois, si on prend aussi en compte les trajectoires de gradient, on peut obtenir à partir d'une fonction de Morse une description topologique complète de la variété sous-jacente. La décomposition cellulaire définie par les variétés instables d'un flot de gradient apparaît pour la première fois chez Thom [Th], tandis que la construction d'un complexe différentiel basé sur les points critiques et dont l'homologie calcule l'homologie de la variété a émergé peu à peu dans les travaux de Smale [Sm1, Sm2], Milnor [Mi2], Witten [Wi] et Floer [F4]. La contribution de Floer [F1, F3] a rendu possible la construction d'un complexe différentiel analogue pour l'action symplectique, regardée comme fonction sur l'espace des lacets contractibles dans une variété symplectique. L'homologie de Floer a été depuis construite dans différents autres contextes, mais à chaque fois l'intuition est utilement nourrie par le complexe de Thom-Smale-Witten (TSW) en dimension finie.

Le travail que je présente dans ce chapitre constitue une étape préliminaire dans la compréhension de l'homologie de Floer pour des fibrations symplectiques à bord de type contact. A la différence du cas des variétés fermées, dans cette situation l'homologie de Floer n'a pas d'analogue topologique naturel, ce qui justifie la mise en place d'outils algébriques adaptés à une structure géométrique supplémentaire. L'analogue géométrique en dimension finie est constitué par le cas des fibrations localement triviales lisses $E \xrightarrow{\pi} B$, dont la structure géométrique est reflétée au niveau cohomologique par la suite spectrale de Leray-Serre. Le but de ce chapitre est de donner une description précise de celle-ci en termes de points critiques et trajectoires de gradient de fonctions de Morse adaptées.

L'existence d'une telle description n'est pas nouvelle en soi et plusieurs références sont disponibles dans la littérature. Austin et Braam définissent dans [AB] un complexe TSW sur \mathbb{R} en partant d'une fonction de Morse-Bott. Leur construction utilise de façon essentielle l'intégration des formes différentielles et calcule la cohomologie de de Rham de la variété. Dans le cas d'une fibration et d'une fonction du type $\pi^*f = f \circ \pi$, avec $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de Morse, le complexe est naturellement filtré par l'indice des variétés critiques et la suite spectrale associée à cette filtration est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre à coefficients réels.

Fukaya étend dans [Fu] la construction de Austin et Braam sur \mathbb{Z} à l'aide de la notion de "cycle géométrique". Il obtient, pour toute fonction de Morse-Bott, une suite spectrale qui converge vers l'homologie à coefficients dans \mathbb{Z} . Son résultat appliqué dans la situation décrite plus haut à π^*f fournit une suite spectrale isomorphe à la suite de Leray-Serre sur \mathbb{Z} .

Dans un esprit plus éloigné de celui du présent travail, mais proche de Witten [Wi], Forman [Fo] décrit la suite spectrale de Leray-Serre à partir de considérations de théorie de Hodge de laplaciens perturbés.

Par rapport aux précédentes références, je présente une approche qui est, à mon avis, plus explicite et dont j'appliquerai les idées directrices dans le chapitre final de cette thèse pour étudier l'homologie de Floer de fibrations symplectiques à bord. Le besoin d'appliquer les constructions de ce chapitre en homologie de Floer fut la première motivation pour utiliser exclusivement des fonctions de Morse au lieu de fonctions de Morse-Bott : au moment de l'élaboration de ce travail le contexte Morse-Bott dans le cadre de la théorie de Floer n'était pas éclairci. Il a été récemment étudié par Bourgeois [Bg] en homologie de contact et par Biran, Polterovich et Salamon [BPS] en homologie de Floer hamiltonienne, en relation avec le travail de Pozniak [Po] sur l'homologie de Floer des lagrangiennes à intersection nette. A terme, cela pourrait simplifier les preuves du dernier chapitre, où j'applique les idées développées ci-dessous pour des fibrations qui ne présentent a priori pas de symétrie du point de vue de la dynamique. La deuxième motivation pour utiliser des fonctions de Morse et non des fonctions de Morse-Bott est la suivante : pour toute fonction de Morse-Bott on peut construire une suite spectrale qui converge vers l'homologie de la variété ambiante, et dont on sait calculer le premier terme. Par contre, pour une fibration on peut aussi calculer le deuxième terme en perturbant la fonction au voisinage des variétés critiques. Cela sera expliqué au 3.5.3. Il nous faut aussi mentionner le travail de M. Hutchings [Hu], accompli simultanément avec le notre et présentant un point de vue plus intrinsèque qui englobe le cadre que nous allons décrire plus bas.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 3.2 je rappelle des notions de base concernant les suites spectrales et le complexe TSW sur une variété compacte. L'isomorphisme de la cohomologie de Morse avec la cohomologie singulière est expliqué par l'intermédiaire de la cohomologie cellulaire. La section 3.3 constitue le cœur du chapitre et étudie le complexe TSW pour une fibration. L'existence d'une filtration naturelle entraîne l'existence d'une suite spectrale qui est isomorphe à la suite de Leray-Serre. Un ingrédient important dans sa construction sera le fait d'utiliser des champs de pseudo-gradient à la place des champs de gradient. Je donne une description détaillée des deux premiers termes en cohomologie de Morse en introduisant dans ce but la notion de système "pré-local" de coefficients. Le résultat principal est le théorème 3.3.1. La section 3.4 décrit les modifications qui sont à apporter dans les arguments précédents pour obtenir les mêmes résultats pour des variétés à bord. Le résultat principal, qui sera utilisé dans le dernier chapitre de cette thèse, est le théorème 3.4.2. Dans la section 3.5 j'utilise la construction de la section 3.3 pour interpréter la formule de Künneth, la suite exacte de Gysin et la classe d'Euler d'un fibré en sphères. L'appendice rappelle les notions de base concernant la théorie de l'indice de Conley [Co]. Celle-ci peut être utilisée pour donner une autre démonstration de l'isomorphisme entre la cohomologie de Morse et la cohomologie singulière en utilisant une filtration par couples indexants [F4, S2]. Je donne une preuve de l'indépendance de cet isomorphisme par rapport au choix de la filtration qui ne semble pas être mentionnée dans la littérature.

3.2 Outils de base

3.2.1 Suite spectrale pour un complexe différentiel gradué muni d'une filtration

Nous suivons dans cette section le formalisme de Bott et Tu [BT]. Les hypothèses que nous mettons sur les complexes différentiels et sur les filtrations peuvent être affaiblies, mais le cadre choisi nous suffira par la suite.

Soit (C, ∂) un \mathbb{Z} -module différentiel. On suppose que C est gradué

$$C = \bigoplus_{k \geq 0} C^k$$

et filtré

$$C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_n \supset 0,$$

la filtration étant compatible avec la différentielle : $\partial C_p \subset C_p$. On suppose de plus que

$$C_p = \bigoplus_{k \geq 0} (C_p \cap C^k), \quad p \geq 0.$$

On notera $C_p^k = C_p \cap C^k$. Posons $A = \bigoplus_p C_p$, $B = \text{gr}(C) = \bigoplus_p C_p / C_{p+1}$ et notons par $i : A \rightarrow B$ l'inclusion $C_p \hookrightarrow C_p / C_{p+1}$. La suite exacte courte de complexes différentiels

$$(3.1) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} H(B) \longrightarrow 0$$

fournit une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{i_1} H^k(B) \xrightarrow{j_1} H^{k+1}(A) \longrightarrow \dots,$$

qu'on écrit sous la forme d'un triangle exact

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{i_1} & H(A) \\ & \searrow k_1 & \swarrow j_1 \\ & H(B) & \end{array} \quad \stackrel{\text{déf.}}{=} \quad \begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ & \searrow k_1 & \swarrow j_1 \\ & B_1 & \end{array}$$

De façon générale, un triangle exact du type (3.2) - appelé aussi *couple exact* - détermine un couple exact *dérivé*

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_2 \\ & \searrow k_2 & \swarrow j_2 \\ & B_2 & \end{array}$$

avec $A_2 = i_1(A_1) \subset A_1$, $B_2 = H(B_1, d_1)$, $d_1 = j_1 \circ k_1$ et i_2, j_2, k_2 induites par i_1, j_1, k_1 . On obtient de cette façon une suite de \mathbb{Z} -modules différentiels (E_r, d_r) , $r \geq 1$ avec

$$\begin{aligned} E_1 &= B_1 = H(B), & d_1 &= j_1 \circ k_1 \\ E_2 &= H(E_1), & d_2 &= j_2 \circ k_2 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Une telle suite (E_r, d_r) , $r \geq 1$ de modules différentiels tels que $E_{r+1} = H(E_r, d_r)$ est appelée *suite spectrale*. Si la suite est stationnaire à partir d'un certain rang et si E_∞ est isomorphe au gradué $\text{gr}(H)$ d'un \mathbb{Z} -module filtré H , on dit que la suite *converge vers* H . Dans notre situation on a le

Théorème 3.2.1 ([BT], 14.6). *Sous les hypothèses précédentes sur le complexe gradué et filtré (C, ∂) , la suite spectrale associée à la filtration converge vers $H(C, \partial)$ filtré comme*

$$H(C) \supset \operatorname{im}(H(C_1) \rightarrow H(C)) \supset \dots \supset \operatorname{im}(H(C_n) \rightarrow H(C)) \supset 0 .$$

On note souvent $E_1^{p,q} = H^{p+q}(C_p/C_{p+1})$, $D_1^{p,q} = H^{p+q}(C_p)$ de sorte que $E_1 = \oplus_{p,q} E_1^{p,q}$ et $A_1 = \oplus_{p,q} D_1^{p,q}$. Le couple exact (3.2) peut s'écrire alors comme

(3.3)

$$\begin{array}{ccc} H^{p+q}(C_{p+1}) & \xrightarrow{i_1} & H^{p+q}(C_p) \\ & \searrow j_1 & \\ H^{p+q+1}(C_{p+1}) & & H^{p+q}(C_p/C_{p+1}) \\ & \swarrow k_1 & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} D_1^{p+1,q-1} & \xrightarrow[(-1,1)]{i_1} & D_1^{p,q} \\ & \searrow j_1 & \\ D_1^{p+1,q} & & E_1^{p,q} \\ & \swarrow k_1 & \end{array}$$

(0,0)

Nous avons indiqué sur le diagramme les bidegrés respectifs de i_1 , j_1 et k_1 . La différentielle $d_1 = j_1 \circ k_1$ est de bidegré $(1, 0)$, tandis que $d_r = j_r \circ k_r$ est de bidegré $(r, -r + 1)$.

Il faut mettre en évidence le fait que la connaissance de E_r et d_r dans une suite spectrale détermine uniquement E_{r+1} , mais *pas* d_{r+1} . Par contre, la connaissance du couple exact $(A_r, E_r, i_r, j_r, k_r)$ détermine entièrement la suite spectrale à partir du rang r .

3.2.2 Suite spectrale de Leray-Serre pour une fibration

Dans cette section la présentation suit de près [McC]. Soit $E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale lisse de fibre F . Pour simplifier, on suppose que la base et la fibre sont compactes. On fixe sur la base une structure de CW-complexe fini. On pourra voir une telle structure comme une filtration

$$B = B^n \supset B^{n-1} \supset \dots \supset B^0 \supset \emptyset ,$$

avec B^0 un ensemble fini de points et B^p , $p \geq 1$ obtenu à partir de B^{p-1} par recollement d'un nombre fini de boules de dimension p le long de leur bord. L'existence d'une telle structure de CW-complexe fini est assurée par la théorie de Morse. On appelle B^p le *squelette de dimension* p . On en déduit une filtration $E^p = \pi^{-1}(B^p)$, $0 \leq p \leq n$ sur E :

$$E = E^n \supset E^{n-1} \supset \dots \supset E^0 \supset \emptyset$$

et une filtration de $C = C^*(E)$:

$$C = C_0 \supset C_1 \supset \dots \supset C_n \supset 0 ,$$

avec

$$(3.4) \quad C_p = \ker (C^*(E) \longrightarrow C^*(E^{p-1})) .$$

Définition 3.2.2. *La suite spectrale associée à la filtration ci-dessus est appelée suite spectrale de Leray-Serre pour la fibration (E, π, B)*

Les identifications qui suivent sont immédiates.

$$C_p \simeq \text{Hom}(C_*(E)/C_*(E^{p-1}), \mathbb{Z}) ,$$

$$C_p/C_{p+1} \simeq \text{Hom}(C_*(E^p)/C_*(E^{p-1}), \mathbb{Z}) ,$$

de sorte que la suite spectrale de Leray-Serre provient du couple exact (3.5)

$$\begin{array}{ccc} H^{p+q}(E, E^p) & \xrightarrow{i^*} & H^{p+q}(E, E^{p-1}) \\ & \searrow j^* & \\ H^{p+q+1}(E, E^p) & & H^{p+q}(E^p, E^{p-1}) \\ & \swarrow \delta & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} D_1^{p+1, q-1} & \xrightarrow{i_1} & D_1^{p, q} \\ & \searrow j_1 & \\ D_1^{p+1, q} & & E_1^{p, q} \\ & \swarrow k_1 & \end{array}$$

On a noté ci-dessus $D_1^{p, q} = H^{p+q}(E, E^{p-1})$, $E_1^{p, q} = H^{p+q}(E^p, E^{p-1})$, alors que i^* , j^* , δ désignent les morphismes qui apparaissent dans la suite exacte longue du triplet (E, E^p, E^{p-1}) avec les inclusions $(E^p, E^{p-1}) \xrightarrow{j} (E, E^{p-1}) \xrightarrow{i} (E, E^p)$.

La propriété cruciale de la suite spectrale de Leray-Serre est qu'elle devient indépendante de la décomposition en CW-complexe à partir du rang $r = 2$. La description du deuxième terme de la suite spectrale nécessite une digression sur l'homologie cellulaire et l'homologie à valeurs dans un système local de coefficients.

Homologie à valeurs dans un système local de coefficients et homologie cellulaire. La référence principale pour les notions présentées dans cette section est [St]. Etant donné un espace topologique B on note $\mathcal{P}(B)$ l'espace des chemins continus dans B . On suppose pour simplifier que B est connexe par arcs.

Définition 3.2.3 ([St]). *Soit A un anneau et M un A -module. Un système local de fibre M sur l'espace topologique B est constitué par la donnée des éléments suivants.*

1. *une copie M_x de M en tout point $x \in B$, appelée fibre en x ;*
2. *une famille d'isomorphismes $(\Phi_\alpha : M_{\alpha(0)} \xrightarrow{\sim} M_{\alpha(1)})_{\alpha \in \mathcal{P}(B)}$ telle que*
 - *si $\alpha \simeq \beta$ sont deux chemins homotopes à bouts fixés, alors $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$;*
 - *si $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(B)$ vérifient $\alpha(1) = \beta(0)$, alors $\Phi_{\alpha \cdot \beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha$.*

Les applications Φ_α seront appelées morphismes de transport par parallélisme.

Le choix d'un point $x_0 \in B$ détermine une équivalence de catégories entre systèmes locaux de fibre M et représentations de $\pi_1(B, x_0)$ dans M_{x_0} : tout système local détermine par définition un morphisme $\pi_1(B, x_0) \longrightarrow \text{Aut } M_{x_0}$. Réciproquement, une représentation détermine un unique système local : les classes d'homotopies de chemins entre x_0 et $x \in B$ sont obtenues en adjoignant un chemin de x_0 à x choisi arbitrairement à des représentants des éléments de $\pi_1(B, x_0)$. Les éléments de $\text{Aut}(M_{x_0})$ représentés par des éléments de $\pi_1(B)$ seront appelés *automorphismes de monodromie*.

Un *isomorphisme de systèmes locaux* est un isomorphisme entre les représentations correspondantes, pour un point de base fixé. De façon équivalente, c'est une collection d'isomorphismes entre les fibres correspondantes qui commutent avec le transport par parallélisme.

Exemple 3.2.4. Le système trivial de fibre M , noté \underline{M} . On pose $M_x = M$, $x \in B$ et $\Phi_\alpha = \text{Id}$, $\alpha \in \mathcal{P}(B)$. Le transport par parallélisme ne dépend pas du chemin et le système trivial correspond à la représentation triviale $\pi_1(B) \longrightarrow \{\text{Id}\} \longrightarrow \text{Aut}(M)$.

Exemple 3.2.5. Systèmes cohomologiques dans une fibration ou *systèmes locaux de Leray-Serre*. Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale. On note $F_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in B$. Pour tout entier $q \geq 0$ on définit un système local $\mathcal{H}^q(F)$ de fibre $H^q(F)$. La fibre au point $x \in B$ est, par définition, $H^q(F_x)$. Si $U \subset B$ est un ouvert contractile et $x, y \in U$, les inclusions $F_x \xrightarrow{i_x} \pi^{-1}(U) \xleftarrow{i_y} F_y$ induisent des isomorphismes en cohomologie et donc un isomorphisme $i_{yx} = i_y^* i_x^{*-1} : H^q(F_x) \xrightarrow{\sim} H^q(F_y)$. Cet isomorphisme est indépendant de U tant que celui-ci reste inclus dans un ouvert contractile fixé $V \ni x, y$. Pour un chemin $\alpha \in \mathcal{P}(B)$, on définit

$$\Phi_\alpha = i_{t_{k+1}t_k} \circ i_{t_k t_{k-1}} \circ \dots \circ i_{t_1 t_0} : H^q(F_{\alpha(0)}) \xrightarrow{\sim} H^q(F_{\alpha(1)}) ,$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} = 1$ une sous-division de $[0, 1]$ telle que $\alpha([t_j, t_{j+1}])$, $0 \leq j \leq k$ soit inclus dans un ouvert contractile. Il est facile de vérifier que la définition ne dépend pas du choix de la sous-division et vérifie les propriétés qui caractérisent un système local de coefficients.

On introduit maintenant la cohomologie singulière à coefficients dans un système local \mathcal{M} . Soit Δ^p le p -simplexe standard de \mathbb{R}^{p+1} dont les sommets sont (v_0, \dots, v_p) . Le A -module des p -chaînes à coefficients dans \mathcal{M} est défini comme

$$C_p(B ; \mathcal{M}) = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \otimes \sigma_i : \sigma_i : \Delta^p \longrightarrow B, m_i \in M_{\sigma_i(v_0)} \right\} .$$

La différentielle $\partial : C_p(B ; \mathcal{M}) \longrightarrow C_{p-1}(B, \mathcal{M})$ est

$$\partial(m \otimes \sigma) = \Phi_{[v_0 v_1]}(m) \otimes \partial_0 \sigma + \sum_{i=1}^p (-1)^i m \otimes \partial_i \sigma ,$$

avec ∂_i les différentielles habituelles sur les simplexes singuliers. Les p -cochaînes à coefficients dans \mathcal{M} forment le A -module

$$C^p(B ; \mathcal{M}) = \text{Hom}(C_p(B ; \mathcal{M}), A) ,$$

avec la différentielle duale

$$\delta(f) = f \circ \partial .$$

Par définition, le p -ième groupe de cohomologie de B à coefficients dans \mathcal{M} est

$$H^p(B ; \mathcal{M}) = H^p(C^*(B ; \mathcal{M}), \delta) .$$

Tout comme la cohomologie singulière habituelle, la cohomologie à valeurs dans un système local de coefficients vérifie les axiomes d'excision, d'invariance par homotopie et d'existence d'une suite exacte longue pour un triplet. Elle est égale, en degré 0, à l'ensemble des éléments de M fixés par tous les automorphismes de monodromie. De plus, la cohomologie singulière à coefficients dans M est égale à la cohomologie à valeurs dans le système local trivial \underline{M} .

Nous rappelons maintenant les notions de base concernant la cohomologie cellulaire à valeurs dans un système local de coefficients \mathcal{M} . On suppose que B admet une structure de CW-complexe et on note B^k le k -squelette correspondant. Nous pouvons définir un complexe différentiel

$$\text{Cell}^p(B ; \mathcal{M}) = H^p(B^p, B^{p-1} ; \mathcal{M}) ,$$

$$\delta_{\text{Cell}} = \delta : H^p(B^p, B^{p-1} ; \mathcal{M}) \longrightarrow H^{p+1}(B^{p+1}, B^p ; \mathcal{M}) ,$$

avec δ le morphisme de connexion dans la suite exacte longue de cohomologie associée au triplet (B^{p+1}, B^p, B^{p-1}) . Le résultat qui suit est classique. On peut en trouver une démonstration pour $\mathcal{M} = \underline{M}$ par exemple dans [MiSt] A.4. et la preuve reste valable telle quelle pour un système local quelconque.

Théorème 3.2.6. *On a un isomorphisme canonique (i.e. dépendant uniquement de la décomposition en CW-complexe)*

$$H^p(\text{Cell}^*(B ; \mathcal{M}), \delta_{\text{Cell}}) \simeq H^p(B ; \mathcal{M}), \quad p \geq 0 .$$

On utilisera plus bas la notation

$$H_{\text{Cell}}^p(B ; \mathcal{M}) = H^p(\text{Cell}^*(B ; \mathcal{M}), \delta_{\text{Cell}}) .$$

Remarque 3.2.7 (description effective de la différentielle cellulaire). Voici maintenant un point de vue alternatif sur l'homologie cellulaire, qui fera le lien avec l'homologie de Morse. Soient $(e_\alpha^p)_\alpha$ les p -cellules ouvertes et $x_\alpha \in e_\alpha^p$ leurs centres. On suppose avoir choisi des orientations pour les e_α^p i.e. des générateurs de $H^p(e_\alpha^p, \partial e_\alpha^p ; \mathcal{M}) \sim M$. La discussion qui suit dépend de ce choix. On a en particulier des isomorphismes

$$(3.6) \quad \text{Cell}^p(B ; \mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{\alpha} M_{x_\alpha} .$$

On définit les nombres d'incidence

$$[e_\alpha^p : e_\beta^{p+1}] = \deg \left(\pi_\alpha \circ f_\beta : \partial e_\beta^{p+1} \longrightarrow B^p \longrightarrow \mathbb{S}_\alpha \right) ,$$

avec $f_\beta : \partial e_\beta^{p+1} \longrightarrow B^p$ l'application de recollement pour e_β^{p+1} , \mathbb{S}_α la sphère obtenue en contractant $B^p \setminus e_\alpha^p$ à un point, $\pi_\alpha : B^p \longrightarrow \mathbb{S}_\alpha$ la projection canonique. La différentielle δ_{Cell}

s'exprime alors (voir [Br] IV.10. pour une preuve en homologie singulière sur \mathbb{Z} et qui reste valable telle quelle en cohomologie à coefficients dans un système local)

$$(3.7) \quad \delta_{\text{Cell}}(m_\alpha) = \sum_{\beta} [e_\alpha^p : e_\beta^{p+1}] \Phi_{\alpha\beta}(m_\alpha), \quad m_\alpha \in M_{x_\alpha},$$

avec $\Phi_{\alpha\beta}$ le transport par parallélisme le long d'un chemin de x_α à x_β contenu dans $\overline{e_\beta^{p+1}}$. Pour que le transport soit indépendant par rapport au chemin, il suffit de supposer [St] que la fermeture de toute cellule e_β^{p+1} est simplement connexe. Ceci peut faire défaut uniquement en dimension 1, lorsqu'une cellule e_β^1 centrée en x_β se referme sur un point $x_\alpha = e_\alpha^0$. Soient alors $\Phi_{\alpha\beta}^\pm$ les chemins de x_α vers x_β qui parcourent e_β^1 dans le sens positif/négatif. Le terme $[e_\alpha^0 : e_\beta^1] \Phi_{\alpha\beta}(m_\alpha)$ de (3.7) est dans cette situation nul et doit être remplacé par

$$(3.8) \quad \langle e_\alpha^0 \rangle \cdot (\Phi_{\alpha\beta}^+(m_\alpha) - \Phi_{\alpha\beta}^-(m_\alpha)),$$

avec $\langle e_\alpha^0 \rangle \in \{\pm 1\}$ l'orientation de e_α^0 .

Nous pouvons désormais donner la description des deux premiers termes de la suite spectrale de Leray-Serre. Pour une démonstration, voir par exemple [McC] 5.4.

Théorème 3.2.8. *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale. On suppose que B admet une structure de CW-complexe fini. La suite spectrale de Leray-Serre associée à la filtration par squelettes de B vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &\simeq \text{Cell}^p(B; \mathcal{H}^q(F)), & d_1 &= \delta_{\text{Cell}}, \\ E_2^{p,q} &\simeq H^p(B; \mathcal{H}^q(F)), \\ E_r^{p,q} &\implies H^{p+q}(E). \end{aligned}$$

Le premier des isomorphismes précédents dépend de la décomposition en CW-complexe de B , mais le deuxième non.

La suite spectrale de Leray-Serre admet une formulation en homologie relative pour une fibration en paires $(F, F_0) \hookrightarrow (E, E_0) \xrightarrow{\pi} B$. Cela veut dire que $F_0 \hookrightarrow E_0 \xrightarrow{\pi} B$ est une sous-fibration avec $E_0 \subset E$ et $F_0 \subset F$. La filtration correspondante sur $C^*(E, E_0) = \text{Hom}(C_*(E)/C_*(E_0), \mathbb{Z})$ est $C_p = \ker(C^*(E, E_0) \longrightarrow C^*(E^{p-1}, E_0^{p-1}))$ (cf. (3.4)). Voici la formulation du résultat pour une fibration lisse à bord au-dessus d'une base sans bord, en prenant $F_0 = \partial F$, $E_0 = \partial E$.

Théorème 3.2.9. *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale lisse. On suppose $\partial B = \emptyset$ et $\partial F \neq \emptyset$. Il existe une suite spectrale (de Leray-Serre) associée à une filtration par squelettes de B correspondant à une décomposition en CW-complexe, qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &\simeq \text{Cell}^p(B; \mathcal{H}^q(F, \partial F)), & d_1 &= \delta_{\text{Cell}}, \\ E_2^{p,q} &\simeq H^p(B; \mathcal{H}^q(F, \partial F)), \\ E_r^{p,q} &\implies H^{p+q}(E, \partial E). \end{aligned}$$

Le premier des isomorphismes précédents dépend de la décomposition en CW-complexe de B , mais le deuxième non.

Remarque 3.2.10. Si $K \subset B$ est un sous-complexe cellulaire on peut définir l'homologie cellulaire relative $H_{\text{Cell}}^p(B, K; \mathcal{M})$ comme l'homologie du complexe

$$\text{Cell}^p(B, K; \mathcal{M}) = H^p(B^p, B^{p-1} \cup K^p; \mathcal{M}) ,$$

$$H^p(B^p, B^{p-1} \cup K^p) \xrightarrow{i^*} H^p(B^p, B^{p-1}) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(B^{p+1}, B^p) \xrightarrow{\pi} H^{p+1}(B^{p+1}, B^p \cup K^{p+1}) ,$$

$$\delta_{\text{Cell}} = \pi \circ \delta \circ i^* ,$$

où la dernière flèche π est la projection donnée par la décomposition canonique en somme directe

$$H^{p+1}(B^{p+1}, B^p) \simeq H^{p+1}(B^{p+1}, B^p \cup K^{p+1}) \oplus H^{p+1}(K^{p+1}, K^p) .$$

L'analogue du théorème 3.2.6 est encore valable en homologie cellulaire relative.

Remarque 3.2.11. Tous les faits énoncés précédemment en cohomologie cellulaire ont un correspondant homologique. Le complexe qui calcule l'homologie singulière de B est

$$\text{Cell}_p(B; \mathcal{M}) = H_p(B^p, B^{p-1}; \mathcal{M}) ,$$

$$\partial_{\text{Cell}} = \partial : H_p(B^p, B^{p-1}; \mathcal{M}) \longrightarrow H_{p-1}(B^{p-1}, B^{p-2}; \mathcal{M}) ,$$

avec ∂ le morphisme de connexion dans la suite exacte longue d'homologie associée au triplet (B^p, B^{p-1}, B^{p-2}) .

3.2.3 Le complexe de Thom-Smale-Witten (TSW) sur une variété compacte

Cette section présente la construction du complexe TSW en s'appuyant sur [L1, Po]. On considère une variété lisse fermée B , une fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ et un champ de vecteurs X qui satisfait

$$X \cdot f < 0$$

en dehors des points critiques de f . On dira encore que X est un champ de pseudo-gradient négatif par rapport à f . Le flot de X sera noté ϕ_t . Les variétés stables et instables de X sont définies de la façon habituelle

$$W^s(x) = \{z \in B : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(z) = x\}, \quad x \in \text{Crit}(f) ,$$

$$W^u(x) = \{z \in B : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(z) = x\} .$$

Les deux sont des variétés lisses difféomorphes à des boules ouvertes. Si l'indice de Morse de x par rapport à f est égal à k alors $\dim W^u(x) = k$ et $\dim W^s(x) = n - k$.

Définition 3.2.12. On dit que le champ X est de type Morse-Smale si toute variété stable est transverse à toute variété instable :

$$W^u(x) \pitchfork W^s(y), \quad x, y \in \text{Crit}(f) .$$

Cette condition est génériquement satisfaite dans l'espace des champs de pseudo-gradient pour une fonction de Morse fixée [Sm2]. L'espace des trajectoires reliant deux points critiques x et y est

$$\widetilde{\mathcal{M}}(x, y) = \{ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow B : \dot{\gamma} = X(\gamma), \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = x, \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = y \} .$$

Comme toute trajectoire γ est uniquement déterminée par $\gamma(0)$, on peut identifier $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ à $W^u(x) \cap W^s(y)$ qui, sous la condition de Morse-Smale, est une variété de dimension $\text{ind}(x) - \text{ind}(y)$. Le groupe additif \mathbb{R} agit par translation sur $\widetilde{\mathcal{M}}(x, y)$ et le quotient est noté $\mathcal{M}(x, y)$:

$$\dim \mathcal{M}(x, y) = \text{ind}(x) - \text{ind}(y) - 1 .$$

Si la différence des indices est égale à 1, alors $\mathcal{M}(x, y)$ est une variété compacte de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble fini. La compacité découle de la description du bord de $\mathcal{M}(x, y)$ qu'on donnera plus loin.

Un choix d'orientations $\langle x \rangle$ des variétés instables $W^u(x)$, $x \in \text{Crit}(f)$ détermine une orientation de $\mathcal{M}(x, y)$. Voici la description du signe qu'on associe à chaque élément $\gamma \in \mathcal{M}(x, y)$ lorsque $\text{ind}(x) - \text{ind}(y) = 1$. Posons $z = \gamma(0)$. Pour une inclusion $W \subset V$ d'espaces vectoriels on convient à ce que, en la présence d'orientations, l'isomorphisme canonique $V \simeq W \oplus (V/W)$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels orientés. Lorsque deux des trois termes de cette identification sont orientés, on déduit une orientation sur le troisième par cette règle.

Maintenant, l'orientation $\langle y \rangle$ induit de façon canonique une co-orientation de $W^s(y)$ en z . L'isomorphisme canonique

$$(3.9) \quad T_z B / T_z W^s(y) \simeq T_z W^u(x) / T_z (W^u(x) \cap W^s(y))$$

détermine par la règle précédente une orientation de $T_z (W^u(x) \cap W^s(y))$. Ce dernier espace vectoriel est de dimension 1 et on associe à γ un signe n_γ égal à ± 1 selon que $\dot{\gamma}(z)$ en est une base positive ou négative.

Le complexe TSW est habituellement construit sur \mathbb{Z} , mais nous élargissons cette définition pour prendre en compte un éventuel système local de coefficients \mathcal{M} sur B . Posons

$$C_{\text{Morse}}^q(B, X; \mathcal{M}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigoplus_{\text{ind}(x)=q} M_x$$

et considérons la différentielle

$$(3.10) \quad \delta_{\text{Morse}} : C_{\text{Morse}}^q(B, X; \mathcal{M}) \longrightarrow C_{\text{Morse}}^{q+1}(B, X; \mathcal{M}) ,$$

$$\delta_{\text{Morse}}(m) = \sum_{\text{ind}(y)=q+1} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(y, x)} n_\gamma \Phi_\gamma^{-1}(m) .$$

Pour expliquer l'identité fondamentale $\delta_{\text{Morse}}^2 = 0$ il faut rappeler la structure du bord d'un espace de trajectoires $\mathcal{M}(x, y)$, $\text{ind}(x) > \text{ind}(y)$. On trouvera une démonstration détaillée des deux théorèmes suivants dans [Po] §2, [F4] ou [Sch1].

Théorème 3.2.13. *Soient $x, y \in \text{Crit}(f)$, $\text{ind}(x) > \text{ind}(y)$ et $(\gamma_j)_{j \geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}(x, y)$. Il existe une sous-suite $(\gamma'_j) \subset (\gamma_j)$, des points $x_1, x_2, \dots, x_k \in \text{Crit}(f)$ avec $\text{ind}(x) > \text{ind}(x_1) > \dots > \text{ind}(x_k) > \text{ind}(y)$, des trajectoires $\gamma^i \in \mathcal{M}(x_i, x_{i+1})$, $x_0 = x$, $x_{k+1} = y$ et des temps de reparamétrisation $(s^i_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tels que*

$$\gamma'_j(\cdot + s^i_j) \xrightarrow{C_{\text{loc}}^\infty} \gamma^i, \quad 0 \leq i \leq k.$$

La notation ci-dessus désigne la convergence uniforme sur tout compact de toutes les dérivées. On dira que la sous-suite (γ'_j) converge vers la trajectoire brisée $(\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^k)$.

La signification du théorème est que le “bord” de $\mathcal{M}(x, y)$ est constitué de trajectoires brisées i.e. des k -uples $(\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^k)$, avec $\gamma^i \in \mathcal{M}(x_i, x_{i+1})$, $x_0 = x$, $x_{k+1} = y$ et $x_i \in \text{Crit}(f)$. On aura nécessairement $\text{ind}(x_i) > \text{ind}(x_{i+1})$ et $k \leq \text{ind}(x) - \text{ind}(y) - 1$. Une conséquence immédiate est la compacité de $\mathcal{M}(x, y)$ si $\text{ind}(x) = \text{ind}(y) + 1$.

Le théorème qui suit assure que toute trajectoire brisée de x à y fait effectivement partie du bord.

Théorème 3.2.14. *Soient $x, y, z \in \text{Crit}(f)$, $\text{ind}(x) > \text{ind}(y) > \text{ind}(z)$ et $(\gamma', \gamma'') \in \mathcal{M}(x, y) \times \mathcal{M}(y, z)$. Alors il existe une famille continue $(\gamma_R)_{R > 1} \subset \mathcal{M}(x, z)$ qui converge pour $R \rightarrow \infty$ vers la trajectoire brisée (γ', γ'') et telle que, pour toute suite $(\gamma_j)_j \subset \mathcal{M}(x, z)$ qui converge vers (γ', γ'') , les γ_j appartiennent à la composante connexe de γ_R pour j assez grand.*

On appellera $(\gamma_R)_R$ un recollement de (γ', γ'') . Même si le théorème est énoncé pour une trajectoire brisée constituée de deux morceaux, on peut l’étendre pour des trajectoires brisées arbitraires en réalisant le recollement de proche en proche.

Lorsque $\text{ind}(x) = \text{ind}(z) + 2$, une composante à bord de $\mathcal{M}(x, z)$ est difféomorphe à un intervalle ouvert dont les bouts convergent vers deux trajectoires brisées, disons (γ'_1, γ''_1) et (γ'_2, γ''_2) , par les points critiques intermédiaires y_1 et, respectivement, y_2 . On a alors le résultat suivant, dont on peut trouver une démonstration détaillée dans [Po] 2.4.1.

Proposition 3.2.15. *Si (γ'_1, γ''_1) et (γ'_2, γ''_2) représentent les bouts d’une composante à bord de $\mathcal{M}(x, z)$, $\text{ind}(x) = \text{ind}(z) + 2$ on a*

$$n_{\gamma'_1} n_{\gamma''_1} + n_{\gamma'_2} n_{\gamma''_2} = 0.$$

Corollaire 3.2.16. *Soit \mathcal{M} un système local de coefficients sur B . Alors*

$$\delta_{\text{Morse}}^2 = 0.$$

Démonstration. (voir aussi (3.13)). Il suffit de montrer $\delta_{\text{Morse}}^2(m) = 0$, $m \in M_z$, $\text{ind}(z) = q$. Or

$$(3.11) \quad \delta_{\text{Morse}}^2(m) = \sum_{\text{ind}(x)=q+2} \left(\sum_{\text{ind}(y)=q+1} \sum_{(\gamma', \gamma'') \in \mathcal{M}(x, y) \times \mathcal{M}(y, z)} n_{\gamma'} n_{\gamma''} \Phi_{\gamma'}^{-1}(\Phi_{\gamma''}^{-1}(m)) \right).$$

Si (γ'_1, γ''_1) et (γ'_2, γ''_2) sont les bouts d’une composante à bord d’un $\mathcal{M}(x, z)$, alors

$$(3.12) \quad n_{\gamma'_1} n_{\gamma''_1} \Phi_{\gamma'_1}^{-1}(\Phi_{\gamma''_1}^{-1}(m)) + n_{\gamma'_2} n_{\gamma''_2} \Phi_{\gamma'_2}^{-1}(\Phi_{\gamma''_2}^{-1}(m)) = 0.$$

En effet, les chemins composés $\gamma'_1 \cdot \gamma''_1$ et $\gamma'_2 \cdot \gamma''_2$ réalisent le bord d'un disque de dimension 2, à savoir exactement la composante en question relevée dans $\widetilde{\mathcal{M}}(x, z)$. Par conséquent ils sont homotopes et $\Phi_{\gamma'_1}^{-1} \circ \Phi_{\gamma''_1}^{-1} = \Phi_{\gamma'_2}^{-1} \circ \Phi_{\gamma''_2}^{-1}$ ce qui, avec la proposition 3.2.15, démontre (3.12). D'un autre côté, le théorème 3.2.14 assure que les termes apparaissant dans la somme (3.11) peuvent être regroupés deux par deux comme dans (3.12). \square

On définit les groupes de cohomologie de Morse à coefficients dans \mathcal{M} comme

$$H_{\text{Morse}}^q(B, X; \mathcal{M}) \stackrel{\text{déf.}}{=} H^q(C_{\text{Morse}}^*(B, X; \mathcal{M}), \delta_{\text{Morse}}) .$$

Par ce qui précède, toute variété instable $W^u(x)$, $\text{ind}(x) = p$ est difféomorphe à \mathbb{R}^p et son adhérence $\overline{W}^u(x)$ dans B est obtenue en rajoutant les strates $W^u(y)$, $\text{ind}(y) < \text{ind}(x)$ tels que $\mathcal{M}(x, y) \neq \emptyset$. Laudenbach [L1] donne une condition suffisante sous laquelle les $\overline{W}^u(x)$ ainsi construits forment une décomposition de B en CW-complexe.

Définition 3.2.17. *Le champ X est dit standard au voisinage des points singuliers si, pour tout $x \in \text{Crit}(f)$, il existe une carte (x^1, \dots, x^n) autour de x dans laquelle X s'écrit $\sum_i \pm x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.*

Lorsque le champ X de type Morse-Smale est standard au voisinage des points critiques, Laudenbach [L1] prouve que $\partial W^u(x) = \overline{W}^u(x) \setminus W^u(x)$ est rétracte par déformation d'un de ses voisinages dans $\overline{W}^u(x)$. Ceci définit pour tout point x d'indice p une application de recollement $\mathbb{S}^{p-1} \rightarrow \bigcup_{\text{ind}(y) < p} W^u(y)$ et donc une décomposition de B en CW-complexe dont les cellules sont les variétés instables $W^u(x)$. La remarque (3.2.7) entraîne pour cette décomposition l'égalité

$$\text{Cell}^p(B; \mathcal{M}) = C_{\text{Morse}}^p(B, X; \mathcal{M}) .$$

Soient maintenant $x, y \in \text{Crit}(f)$, $\text{ind}(x) = \text{ind}(y) + 1$ et regardons le nombre de composantes connexes de $W^u(x)$ au voisinage de $W^u(y)$. Le théorème 3.2.14 assure qu'il est minoré par $\#\mathcal{M}(x, y)$, tandis que le théorème 3.2.13 donne une majoration par $\#\mathcal{M}(x, y)$. Par conséquent il y en a exactement $\#\mathcal{M}(x, y)$ et elles sont indexées par les éléments de $\mathcal{M}(x, y)$.

Prenons une telle trajectoire $\gamma \in \mathcal{M}(x, y)$. Posons $z = \gamma(t)$ pour un t suffisamment grand et z appartiendra à la composante connexe indexée par γ . L'isomorphisme d'espaces vectoriels orientés (3.9) peut être écrit comme suit [Po] 2.4.2

$$\frac{T_z W^u(x)}{\langle n_\gamma \dot{\gamma}(z) \rangle} = \frac{T_z W^u(x)}{T_z(W^u(x) \cap W^s(y))} \simeq \frac{T_z B}{T_z W^s(y)} \simeq \frac{T_y B}{T_y W^s(y)} \simeq W^u(y) .$$

L'avant dernière identité est obtenue par transport parallèle le long de γ . On en déduit

$$T_z W^u(x) = \langle n_\gamma \gamma \rangle \oplus W^u(y) .$$

Ceci peut être lu aussi de la façon suivante : n_γ est égal à ± 1 selon que $W^u(y)$ hérite l'orientation du bord de $W^u(x)$ ou non. La définition du degré d'une application entraîne alors l'expression suivante pour le nombre d'incidence :

$$[W^u(y) : W^u(x)] = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(x, y)} n_\gamma .$$

En tenant compte des expressions (3.7), (3.8), (3.10) pour les différentielles du complexe cellulaire et du complexe TSW on obtient

$$(3.13) \quad \delta_{\text{Cell}} = \delta_{\text{Morse}} .$$

On pourra remarquer le fait que, dans l'identification ci-dessus, l'orientation des variétés instables choisie pour définir le complexe TSW doit être la même que celle utilisée dans la description 3.2.7 de la différentielle cellulaire.

On rassemble les résultats précédents dans le

Théorème 3.2.18. *Soit X un champ de pseudo-gradient négatif sur une variété compacte B . On suppose que X vérifie la condition de Morse-Smale et qu'il est standard au voisinage des points singuliers. Les variétés instables déterminent une décomposition de B en CW-complexe et, pour tout système local de coefficients \mathcal{M} , on a l'isomorphisme*

$$H_{\text{Morse}}^p(B, X; \mathcal{M}) \simeq H_{\text{Cell}}^p(B; \mathcal{M}), \quad p \geq 0 .$$

Corollaire 3.2.19. *Soient B , X et \mathcal{M} comme ci-dessus. On a un isomorphisme qui ne dépend que du choix d'orientations des variétés instables*

$$H_{\text{Morse}}^p(B, X; \mathcal{M}) \simeq H^p(B; \mathcal{M}), \quad p \geq 0 .$$

3.3 Fonctions de Morse et fibrations

On considère dans cette section des fibrations localement triviales lisses $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ dont la fibre F et la base B sont compactes sans bord. La fibre $\pi^{-1}(x)$ au-dessus d'un point $x \in B$ sera notée F_x et le relèvement π^*f d'une fonction $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ sera noté \tilde{f} . Nous allons construire sur E des champs de pseudo-gradient négatif d'une forme particulière qui vérifient la condition de transversalité de Morse-Smale et qui sont standard au voisinage des points critiques (voir les définitions 3.2.12 et 3.2.17). Le complexe TSW correspondant sera muni d'une filtration naturelle et on démontre que la suite spectrale qui lui est associée est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration (E, π, B, F) . De manière plus précise, nous allons démontrer à la fin de la section 3.3.3 le

Théorème 3.3.1 (Suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse). *Soit (E, B, F, π) une fibration localement triviale lisse compacte sans bord. Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction de Morse $f_\epsilon : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f_\epsilon - \tilde{f}\|_{C^1} \leq \epsilon$ et un champ X_ϵ qui est un pseudo-gradient négatif par rapport à f_ϵ , vérifiant $\{X_\epsilon = 0\} = \text{Crit}(f_\epsilon)$ et*

$$\pi(\text{Crit}(f_\epsilon)) = \text{Crit}(f) .$$

De plus :

a) *Il existe une suite spectrale $(E_r^{*,*})_{r \geq 1}$ qui converge vers $H_{\text{Morse}}^*(E, X_\epsilon; \mathbb{Z})$ et qui vérifie*

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= C_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)), \quad d_1 = \delta_{\text{Morse}} , \\ E_2^{p,q} &= H_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)) . \end{aligned}$$

La notation $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ désigne un système local de coefficients canoniquement isomorphe au système local de Leray-Serre $\mathcal{H}^q(F)$ (cf. 3.2.5). Cette suite spectrale, ainsi que le système de coefficients $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$, sont construits exclusivement en termes de cohomologie de Morse.

b) La suite spectrale $(E_r^{*,*})_{r \geq 2}$ est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre $({}_{LS}E_r^{*,*})_{r \geq 2}$ par un isomorphisme qui dépend uniquement du choix d'orientations pour les variétés instables de X_ϵ .

3.3.1 Fonctions de Morse sur l'espace total d'une fibration

Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ ses points critiques. La relevée \tilde{f} est une fonction de Morse-Bott, au sens où son lieu critique est constitué de sous-variétés transversalement non dégénérées, à savoir les fibres au-dessus des points critiques de f .

L'idée de perturber f au voisinage des fibres critiques de façon à obtenir une fonction de Morse apparaît déjà dans [Bo]. Soient $\{p_1, \dots, p_k\}$ les points critiques de f et choisissons des ouverts deux à deux disjoints $U_i \ni p_i$ avec des trivialisations

$$\begin{array}{ccccc} \Psi_i : \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\sim} & U_i \times F & \ni & (x, y) \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 & & \searrow \text{pr}_2 \\ & & U_i & & F \end{array}$$

Fixons une fonction de Morse $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ et posons $f_i = \varphi \circ \text{pr}_2 \circ \Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $p_i \in V_i \subset U_i$ des ouverts relativement compacts et $\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de troncature lisses à support compact, valant 1 sur V_i .

Proposition 3.3.2. Avec les notations précédentes, la fonction

$$f_\epsilon = \tilde{f} + \epsilon \sum_i \tilde{\rho}_i f_i$$

est une fonction de Morse pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Ses points critiques sont (p_i, y) , $p_i \in \text{Crit}(f)$, $y \in \text{Crit}(f_i)$.

Démonstration. La fonction f_ϵ est évidemment bien définie sur E tout entier. On voit facilement que ses points critiques se trouvent dans $\bigcup_i \pi^{-1}(U_i)$ et il suffit de faire l'étude dans un $\pi^{-1}(U_i)$ fixé. Via la trivialisation Ψ_i on peut écrire

$$f_\epsilon(x, y) = f(x) + \epsilon \rho_i(x) \varphi(y) ,$$

$$df_\epsilon(x, y) = (df(x) + \epsilon d\rho_i(x) \varphi(y), \epsilon \rho_i(x) d\varphi(y)) .$$

Comme $df \neq 0$ sur le compact $\overline{U_i} \setminus V_i$ et φ est bornée, on peut choisir $\epsilon > 0$ suffisamment petit de façon à ce que la première composante de df_ϵ ne s'annule pas sur $\pi^{-1}(\overline{U_i} \setminus V_i)$. Par ailleurs, dans $\pi^{-1}(V_i)$ on a $df_\epsilon(x, y) = (df(x), \epsilon d\varphi(y))$ et les points critiques sont de la forme (p_i, y) , $y \in \text{Crit}(\varphi)$. Leur non-dégénérescence est immédiate. □

3.3.2 Métriques adaptées et champs de pseudo-gradient

On pose dans ce qui suit $V_\alpha = \ker(d\pi : T_\alpha E \rightarrow T_{\pi(\alpha)} B)$ et on appelle $(V_\alpha)_{\alpha \in E}$ la *distribution verticale*. Par définition, une *connexion* sur E est une distribution de rang n , $n = \dim B$, transverse à la distribution verticale, qu'on appellera aussi *distribution horizontale*. Une recette simple de construction est la suivante : pour toute métrique riemannienne ρ sur E , la famille $H_\rho = (V_\alpha^\perp)_{\alpha \in E}$ définit une connexion. L'existence des métriques riemanniennes entraîne ainsi l'existence des connexions.

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit donné par la proposition 3.3.2, nous allons construire un champ X_ϵ de pseudo-gradient négatif par rapport à f_ϵ qui est standard au voisinage des points singuliers, qui vérifie la condition de Morse-Smale et tel que

$$(3.14) \quad \pi_* X_\epsilon = -\nabla f .$$

La condition (3.14) sera essentielle dans la démarche que nous adoptons. Pour la réaliser, le choix immédiat serait $X_\epsilon = -\nabla f$ mais ceci n'est pas un champ de pseudo-gradient pour f_ϵ . D'un autre côté, si on choisit $X_\epsilon = -\nabla f_\epsilon = -\nabla \tilde{f} - \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \nabla f_i - \epsilon \sum f_i \nabla \tilde{\rho}_i$ pour satisfaire à la condition de pseudo-gradient alors (3.14) ne sera pas vérifiée au-dessus des $U_i \setminus \bar{V}_i$ à cause de la présence des termes en $\nabla \tilde{\rho}_i$. Les deux problèmes seront résolus en prenant

$$(3.15) \quad X_\epsilon \stackrel{\text{déf.}}{=} -\nabla \tilde{f} - \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \nabla f_i .$$

Proposition 3.3.3. *Soient f , φ , f_i , ρ_i définies comme plus haut. Soit g une métrique sur B et h une métrique sur F . On note aussi par h la métrique induite sur la distribution verticale de $U_i \times F$, $1 \leq i \leq k$.*

- a) *L'ensemble $\mathcal{R}_{g,h}$ des métriques ρ sur E telles que $\rho|_{H_\rho} = \pi^* g$, $\Psi_{i*} H_\rho$ soit la distribution horizontale triviale $\ker \text{pr}_{2*}$ sur $U_i \times F$ et $\rho|_V = \Psi_i^* h$ sur $\pi^{-1}(U_i)$ est non vide;*
- b) *Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour toute métrique $\rho \in \mathcal{R}_{g,h}$, le champ X_ϵ défini par (3.15) est un champ de pseudo-gradient négatif pour f_ϵ et vérifie (3.14) pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$;*
- c) *Si $\nabla^g f$ et $\nabla^h \varphi$ sont standard au voisinage des points critiques, alors X_ϵ l'est aussi pour tout $\epsilon > 0$.*

Démonstration. a) A l'aide d'une partition de l'unité, on construit une métrique ρ_0 sur E qui coïncide avec $\Psi_i^*(g \oplus h)$ sur $\pi^{-1}(V_i)$. La distribution horizontale $H = H_{\rho_0}$ est alors plate au-dessus de V_i . On définit une métrique ρ comme

$$\rho|_V = \rho_0|_V, \quad \rho|_H = \pi^* g, \quad V \perp_\rho H$$

et on aura $\rho \in \mathcal{R}_{g,h}$.

- b) Comme $df|_V \equiv 0$ et $df_i|_H \equiv 0$ on déduit que

$$\nabla^\rho f_i \in V, \quad \nabla^\rho \tilde{f} \in H$$

et donc $\pi_* X_\epsilon = -\pi_* \nabla^\rho \tilde{f}$. Soit Y un vecteur quelconque tangent à B et Y_H son relevé horizontal. On a

$$g(\nabla f, Y) = df(\pi_* Y_H) = d\tilde{f}(Y_H) = \rho(\nabla \tilde{f}, Y_H) = \rho(\nabla \tilde{f}_H, Y_H) = g(\pi_* \nabla \tilde{f}, \pi_* Y_H) = g(\pi_* \nabla \tilde{f}, Y) ,$$

ce qui assure que $\pi_* X_\epsilon = -\nabla f$.

Evaluons maintenant $X_\epsilon \cdot f_\epsilon$. Comme $X_\epsilon = -\nabla f_\epsilon$ au-dessus de $\cup V_i \cup {}^c(\cup U_i)$, il suffit de faire l'étude au-dessus de $\overline{U}_i \setminus V_i$, où l'on a

$$\begin{aligned} (-\nabla \tilde{f} - \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \nabla f_i) \cdot (\tilde{f} + \epsilon \tilde{\rho}_i f_i) &= -\left(|\nabla f|_g^2 + \epsilon f_i g(\nabla \rho_i, \nabla f) + \epsilon \tilde{\rho}_i df_i(\nabla \tilde{f}) + \right. \\ &\quad \left. \epsilon \tilde{\rho}_i d\tilde{f}(\nabla f_i) + \epsilon^2 \tilde{\rho}_i f_i d\tilde{\rho}_i(\nabla f_i) + \epsilon^2 \tilde{\rho}_i^2 |\nabla f_i|^2 \right) \\ &= -\left(|\nabla f|_g^2 + \epsilon f_i g(\nabla \rho_i, \nabla f) + \epsilon^2 \tilde{\rho}_i^2 |\nabla f_i|^2 \right) \\ &\leq -|\nabla f|_g^2 - \epsilon f_i g(\nabla \rho_i, \nabla f) < 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité a lieu pour ϵ suffisamment petit, vu que $\nabla^g f$ ne s'annule pas sur le compact $\overline{U}_i \setminus V_i$.

c) L'affirmation est évidente par la structure de $\rho \in \mathcal{R}_{g,h}$. □

Proposition 3.3.4. *Soient g, h des métriques sur B et F telles que $\nabla^g f$ et $\nabla^h \varphi$ vérifient la condition de transversalité de Morse-Smale. Soit $\rho_0 \in \mathcal{R}_{g,h}$ fixée. On définit*

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \rho \in \mathcal{R}_{g,h} : \rho = \rho_0 \text{ sur } \bigcup \pi^{-1}(\overline{U}_i) \text{ et } \rho|_V = \rho_0|_V \right\}$$

Il existe un ensemble dense de métriques de \mathcal{R}_0 telles que X_ϵ soit de Morse-Smale pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

La preuve de cette proposition est fournie dans la section 3.3.5.

3.3.3 La suite spectrale pour le complexe TSW d'une fibration

On utilise toujours les notations de la section précédente. On fixe f, Ψ_i, ρ_i et φ , ainsi que des métriques g et h sur B et F telles que $\nabla^g f$ et $\nabla^h \varphi$ soient des champs de Morse-Smale standard au voisinage des points critiques. On fixe aussi une métrique générique $\rho \in \mathcal{R}_{g,h}$ et $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Le champ X_ϵ est un pseudo-gradient négatif pour f_ϵ , de Morse-Smale et standard autour des points critiques. On écrira désormais X au lieu de X_ϵ . On note (C^*, ∂) le complexe TSW sur \mathbb{Z} associé à X

$$C^k = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \text{Crit}(f_\epsilon) \\ \text{ind}(\alpha) = k}} \mathbb{Z} \langle \alpha \rangle.$$

On fixe des orientations pour les variétés instables de f et φ et on convient à ce que l'orientation $\langle \alpha \rangle$ d'un point critique $\alpha = (p_i, y)$ soit la somme $\langle p_i \rangle \oplus \langle y \rangle$.

Le complexe C^* est naturellement muni d'une filtration décroissante qui respecte la graduation

$$C_p = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \text{Crit}(f_\epsilon) \\ \text{ind}(\pi(\alpha)) \geq p}} \mathbb{Z} \langle \alpha \rangle.$$

Proposition 3.3.5. *La différentielle ∂ préserve la filtration*

$$\partial(C_p^k) \subset C_p^{k+1}.$$

Démonstration. Ceci découle de la propriété fondamentale (3.14), par laquelle les trajectoires de X se projettent sur des trajectoires de $-\nabla f$. Si $\mathcal{M}(\alpha, \beta) \neq \emptyset$, $\alpha, \beta \in \text{Crit}(f_\epsilon)$ alors $\mathcal{M}(\pi(\alpha), \pi(\beta)) \neq \emptyset$, ce qui entraîne par la condition de Morse-Smale sur $-\nabla f$ que $\text{ind}(\pi(\alpha)) \geq \text{ind}(\pi(\beta))$, avec égalité si et seulement si $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Dans ce dernier cas, les trajectoires reliant α à β doivent être entièrement contenues dans la fibre correspondante. \square

Avec les notations de la section 3.2.1 on a

$$A = \bigoplus_{p \geq 0} C_p, \\ B = \bigoplus_{p \geq 0} C_p / C_{p+1} = \bigoplus_{p \geq 0} \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{\substack{\text{ind}(\alpha) = k \\ \text{ind}(\pi(\alpha)) = p}} \mathbb{Z}\langle \alpha \rangle.$$

Le complexe différentiel

$$C_p / C_{p+1} = \bigoplus_{\text{ind}(\pi(\alpha)) = p} \mathbb{Z}\langle \alpha \rangle$$

s'identifie au complexe de Morse dans les fibres au-dessus des points critiques d'indice p sur la base. En tant que \mathbb{Z} -module l'identification est automatique. D'un autre côté, la différentielle induite $\tilde{\partial} : C_p / C_{p+1} \rightarrow C_p / C_{p+1}$ agit comme

$$\tilde{\partial}[a] = \partial a \pmod{C_{p+1}}, \quad a \in C_p.$$

Il suffit de vérifier l'affirmation sur les générateurs $\langle \alpha \rangle$, $\alpha \in \text{Crit}(f_\epsilon)$, $\text{ind}(\pi(\alpha)) = p$. Pour fixer les idées, supposons $\text{ind}(\alpha) = k$. On note dans ce qui suit $\#\mathcal{M}(\alpha, \beta) = \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)} n_\gamma$. Alors

$$\begin{aligned} \partial \langle \alpha \rangle &= \sum_{\text{ind}(\beta) = k+1} \#\mathcal{M}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle = \sum_{i \geq p} \sum_{\substack{\text{ind}(\beta) = k+1 \\ \text{ind}(\pi(\beta)) = i}} \#\mathcal{M}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle = \\ &= \sum_{\substack{\text{ind}(\beta) = k+1 \\ \pi(\beta) = \pi(\alpha)}} \#\mathcal{M}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle + \sum_{i > p} \sum_{\substack{\text{ind}(\beta) = k+1 \\ \text{ind}(\pi(\beta)) = i}} \#\mathcal{M}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial \langle \alpha \rangle \pmod{C_{p+1}} &= \sum_{\substack{\text{ind}(\beta) = k+1 \\ \pi(\beta) = \pi(\alpha)}} \#\mathcal{M}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle = \sum_{\substack{\text{ind}_{\text{fibre}}(\beta) = \text{ind}_{\text{fibre}}(\alpha) + 1 \\ \beta \in F_{\pi(\alpha)}}} \#\mathcal{M}_{\text{fibre}}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle \\ &= \partial_{\text{fibre}} \langle \alpha \rangle. \end{aligned}$$

On a noté ci-dessus par ∂_{fibre} la différentielle de Morse usuelle dans les fibres critiques de \tilde{f} . Le calcul précédent utilise de façon cruciale le fait qu'une trajectoire reliant deux points dont les projections sur la base ont le même indice doit nécessairement être contenue dans une fibre (Proposition 3.3.5). Le problème des signes est réglé grâce à la convention sur les orientations.

On peut alors écrire

$$(3.16) \quad E_1 = B_1 \simeq \bigoplus_{p \geq 0} \bigoplus_{\substack{p_i \in B \\ \text{ind}(p_i)=p}} H_{\text{Morse}}(F_{p_i}) .$$

Nous explicitons maintenant la différentielle $d_1 = j_1 \circ k_1 : E_1 \rightarrow E_1$ et pour cela on décrit les morphismes i_1, j_1, k_1 dans (3.2). En mettant $C'_p = \oplus_{\text{ind}(\pi(\alpha))=p} \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle$ on aura

$$C_p = C'_p \oplus C_{p+1}$$

et la différentielle induite $\partial_p : C_p \rightarrow C_p$ s'écrira sur composantes comme

$$(3.17) \quad \begin{cases} C'_p \xrightarrow{\partial_{\text{fibre}} \oplus \partial''} C'_p \oplus C_{p+1} \\ C_{p+1} \xrightarrow{0 \oplus \partial_{p+1}} C'_p \oplus C_{p+1} \end{cases}$$

Une classe de cohomologie dans $H(C_p)$ est représentée par un élément $\alpha' \oplus \alpha'' \in C'_p \oplus C_{p+1}$. L'inclusion $C_{p+1} \hookrightarrow C_p$ s'écrit

$$\underbrace{\alpha'}_{C'_{p+1}} \oplus \underbrace{\alpha''}_{C_{p+2}} \mapsto \underbrace{0}_{C'_p} \oplus \underbrace{(\alpha' \oplus \alpha'')}_{C_{p+1}}$$

et faire agir i_1 signifie prendre la classe de cohomologie du membre de droite de l'égalité ci-dessus.

D'un autre côté, faire agir j_1 signifie prendre la classe de cohomologie de α' par rapport à ∂_{fibre} . Elle est bien définie puisque la décomposition (3.17) de ∂_p entraîne que la composante dans C'_p d'un cycle est un cycle pour ∂_{fibre} .

$$j_1 : H(A) = \oplus_p H(C_p) \rightarrow H(B) = \oplus_p H(C_p/C_{p+1}) ,$$

$$[\alpha' \oplus \alpha'']_{\partial_p} \mapsto [\alpha']_{\partial_{\text{fibre}}} .$$

Pour décrire k_1 il suffit de regarder le degré k de la suite exacte (3.1) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{p+1}^{k+1} & \xrightarrow{i} & C_p^{k+1} & \longrightarrow & (C_p/C_{p+1})^{k+1} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow \partial_p & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{p+1}^k & \longrightarrow & \underbrace{C_p^k}_{(\alpha_i, 0)} & \longrightarrow & \underbrace{(C_p/C_{p+1})^k}_{\alpha = \sum \alpha_i} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Prenons un cycle $\alpha = \sum_i \alpha_i \in (C_p/C_{p+1})^k$ où chaque α_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers de points critiques dans une fibre F_{p_i} , avec $\text{ind}(p_i) = p$. Vu que

$$\tilde{\partial}_p \alpha = 0 \iff \partial_{\text{fibre}} \alpha = 0 \iff \forall i, \partial_{\text{fibre}} \alpha_i = 0 ,$$

on peut supposer par linéarité $\alpha = \alpha_i$, c'est-à-dire que les points critiques apparaissant dans l'expression de α appartiennent tous à une même fibre. Alors

$$\begin{aligned} \partial_p(\alpha_i, 0) &= (0, \partial'' \alpha_i) = \left(0, \sum_{\substack{\text{ind}(\beta)=k+1 \\ \text{ind}(\pi(\beta)) \geq p+1}} \# \mathcal{M}(\beta, \alpha_i) \langle \beta \rangle \right) = \\ &= i \left(\sum_{\substack{\text{ind}(\beta)=k+1 \\ \text{ind}(\pi(\beta))=p+1}} \# \mathcal{M}(\beta, \alpha_i) \langle \beta \rangle, \sum_{\substack{\text{ind}(\beta)=k+1 \\ \text{ind}(\pi(\beta)) \geq p+2}} \# \mathcal{M}(\beta, \alpha_i) \langle \beta \rangle \right). \end{aligned}$$

Le morphisme k_1 agit en prenant la classe de cohomologie de la dernière paire. Après composition avec j_1 on obtient

$$\underbrace{[\alpha]}_{\substack{\text{ind}(\alpha)=k \\ \text{ind}(\pi(\alpha))=p}} \longmapsto \left[\sum_{\substack{\text{ind}(\beta)=k+1 \\ \text{ind}(\pi(\beta))=p+1}} \# \mathcal{M}(\beta, \alpha) \langle \beta \rangle \right].$$

Dans la formule ci-dessus, le représentant α de la classe $[\alpha]$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers de points critiques situés dans une même fibre au-dessus d'un point d'indice p , tandis que $\# \mathcal{M}(\beta, \alpha)$ représente, pour un point β fixé avec $\text{ind}(\beta) = k + 1$, l'extension par linéarité dans le deuxième argument de la quantité $\# \mathcal{M}(\beta, \alpha_i)$ définie pour les points critiques α_i d'indice k .

L'expression de d_1 prend une forme plus parlante si on introduit l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x} : C_{\text{Morse}}^q(F_x) &\longrightarrow C_{\text{Morse}}^q(F_{\bar{x}}), \\ \langle y \rangle &\longmapsto \sum_{\text{ind}(z)=q} \# \mathcal{M}_{\gamma}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y) \langle z \rangle, \end{aligned}$$

où $x, \bar{x} \in B$, $\text{ind}(x) = p$, $\text{ind}(\bar{x}) = p + 1$, $C_{\text{Morse}}^q(F_x)$, $C_{\text{Morse}}^q(F_{\bar{x}})$ sont les complexes de Morse dans les fibres F_x , $F_{\bar{x}}$ pour f_x , $f_{\bar{x}}$ respectivement, $\gamma \in \mathcal{M}(\bar{x}, x)$ et

\mathcal{M}_{γ} = trajectoires sur E qui se projettent sur γ dans B .

La notation $x \otimes y$ désigne le point y de la fibre F_x comme point dans E .

Lemme 3.3.6. *L'application $\Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x}$ est un morphisme de complexes différentiels :*

$$\Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x} \circ \partial_x + \partial_{\bar{x}} \circ \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x} = 0,$$

où ∂_x , $\partial_{\bar{x}}$ représentent les différentielles de Morse dans les fibres F_x et, respectivement, $F_{\bar{x}}$.

Démonstration. Soit $y' \in F_x$, $\text{ind}_{\text{fibre}}(y') = q - 1$. On a successivement

$$\begin{aligned} \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x} \circ \partial_x \langle y' \rangle &= \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x} \left(\sum_{\text{ind } y=q} \# \mathcal{M}_{F_x}(y, y') \langle y \rangle \right) = \\ &= \sum_{\text{ind } y=q} \sum_{\text{ind } z=q} \# \mathcal{M}_{F_x}(y, y') \cdot \# \mathcal{M}_{\gamma}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y) \langle z \rangle = \\ &= \sum_{\text{ind } z=q} \left(\sum_{\text{ind } y=q} \# \mathcal{M}_{F_x}(y, y') \cdot \# \mathcal{M}_{\gamma}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y) \right) \langle z \rangle \end{aligned}$$

et, de façon similaire,

$$\partial_{\bar{x}} \circ \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x} \langle y' \rangle = \sum_{\text{ind } z=q} \left(\sum_{\text{ind } z'=q-1} \# \mathcal{M}_{F_{\bar{x}}}(z, z') \cdot \# \mathcal{M}_{\gamma}(\bar{x} \otimes z', x \otimes y') \right) \langle z \rangle .$$

Il suffit de montrer que, pour $z \in \text{Crit}_q(F_{\bar{x}})$ et $y' \in \text{Crit}_{q-1}(F_x)$ fixés, on a l'égalité

$$c_{\gamma} \stackrel{\text{not.}}{=} \sum_{\text{ind } y=q} \# \mathcal{M}_{F_x}(y, y') \cdot \# \mathcal{M}_{\gamma}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y) + \sum_{\text{ind } z'=q-1} \# \mathcal{M}_{F_{\bar{x}}}(z, z') \cdot \# \mathcal{M}_{\gamma}(\bar{x} \otimes z', x \otimes y') = 0 .$$

Notons qu'une famille à un paramètre de trajectoires reliant $\bar{x} \otimes z$ à $x \otimes y'$ se projette nécessairement sur une famille à un paramètre de trajectoires reliant \bar{x} à x . Mais $\mathcal{M}(\bar{x}, x)$ est un ensemble discret, ce qui assure que toute famille à un paramètre dans $\mathcal{M}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y')$ se projette sur un unique élément de $\mathcal{M}(\bar{x}, x)$. Cela entraîne non seulement

$$(3.18) \quad \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(\bar{x}, x)} c_{\gamma} = \sum_{\text{ind}(\alpha)=p+q} \# \mathcal{M}(\bar{x} \otimes z, \alpha) \cdot \# \mathcal{M}(\alpha, x \otimes y') = \sum_{\sigma \in \partial \mathcal{M}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y')} \text{sign}(\sigma) = 0 ,$$

mais aussi

$$c_{\gamma} = 0 ,$$

vu que l'égalité (3.18) découle de l'annulation deux par deux des termes qui compactifient des familles à un paramètre dans $\mathcal{M}(\bar{x} \otimes z, x \otimes y')$, qui par la remarque précédente se retrouvent regroupés dans les différentes sommes c_{γ} , $\gamma \in \mathcal{M}(\bar{x}, x)$. □

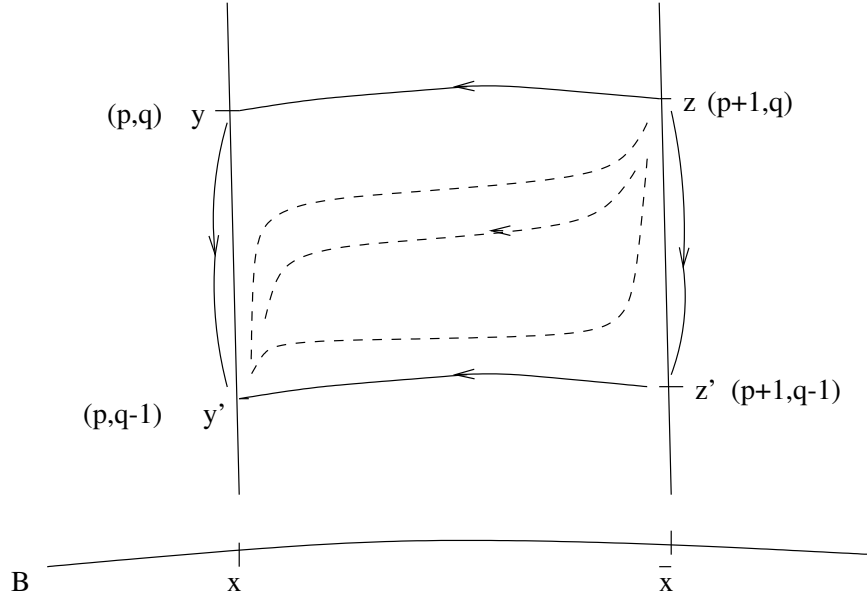


Fig. 3.1: Recollement de trajectoires dont la différence des indices aux bouts est égale à 2

Nous appellerons toujours $\Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x}$ l'application induite en cohomologie. La différentielle d_1 s'écrit alors

$$(3.19) \quad d_1 : x \otimes [u] \mapsto \sum_{\text{ind}(\bar{x})=p+1} \bar{x} \otimes \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(\bar{x}, x)} \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x}([u]) ,$$

avec $\text{ind}(x) = p$, $u \in C^q(F_x)$, $\partial_{\text{fibre}} u = 0$.

Lemme 3.3.7. *L'application $\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x} : C^q(F_x) \longrightarrow C^q(F_{\bar{x}})$ induit un isomorphisme en cohomologie.*

Démonstration. Nous allons décrire $\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}$ comme le morphisme de complexes induit par une certaine “déformation” de f_x vers $f_{\bar{x}}$. Il existe une trivialisation

$$\Psi : E|_{\text{im } \gamma} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \times F ,$$

$$F_{\gamma(t)} \longmapsto \{-t\} \times F$$

qui coïncide avec Ψ_x , $\Psi_{\bar{x}}$ sur $\text{im } \gamma \cap U_x$ et, respectivement, $\text{im } \gamma \cap U_{\bar{x}}$ sous la projection $\text{im } \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, $\gamma(t) \longmapsto -t$. Dans cette trivialisation, on peut interpréter $H = f_{\epsilon} \circ \Psi^{-1}$ comme une déformation de $\epsilon\varphi = f_{\epsilon} \circ \Psi_x^{-1}$ vers $\epsilon\varphi = f_{\epsilon} \circ \Psi_{\bar{x}}^{-1}$:

$$H = (H_t)_{t \in \mathbb{R}} : F \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$H \equiv \epsilon\varphi \text{ au voisinage de } \pm\infty .$$

En considérant sur $\{t\} \times F$ la métrique g_t de $F_{\gamma(-t)}$ induite par Ψ , le champ X_{ϵ} s'écrit sur $\mathbb{R} \times F$

$$X_{\epsilon} = -\nabla_{g_t} H_t + \frac{\partial}{\partial t}$$

et réalise une déformation de $\epsilon\nabla\varphi$. Les déformations de ce type sont considérées dans [AB], §2.3. Si ϕ_s désigne le flot de $-\nabla H_t + \frac{\partial}{\partial t}$ on définit, pour $y \in \text{Crit } \varphi$, la variété instable

$$\mathcal{U}_y = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times F : \lim_{s \rightarrow -\infty} \phi_s(t, z) = (-\infty, y)\}$$

et la variété stable

$$\mathcal{S}_y = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times F : \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi_s(t, z) = (+\infty, y)\} ,$$

de dimension $\text{ind}(y) + 1$ et, respectivement, $\dim F - \text{ind}(y) + 1$. Les intersections $\widetilde{\mathcal{M}}(y, z) = \mathcal{U}_y \cap \mathcal{S}_z$ sont transverses pour $y \neq z$ et de dimension $\text{ind}(y) - \text{ind}(z) + 1$. Le groupe \mathbb{R} agit par translations et $\mathcal{M}(y, z) = \widetilde{\mathcal{M}}(y, z)/\mathbb{R}$ est discret pour $\text{ind}(y) = \text{ind}(z)$. Alors on prouve [AB] que l'application

$$\chi : C^q(F) \longrightarrow C^q(F) ,$$

$$\langle y \rangle \longmapsto \sum_{\text{ind}(z)=q} \# \mathcal{M}(y, z) \langle z \rangle$$

est un morphisme de complexes différentiels au sens du lemme 3.3.6, qui induit en cohomologie un morphisme indépendant de la déformation à bouts fixés. Dans notre cas, la déformation triviale $H'_t = \epsilon\varphi$, $X'_{\epsilon} = -\epsilon\nabla\varphi + \frac{\partial}{\partial t}$ détermine $\chi' = \text{Id}$ au niveau des complexes de chaînes, donc $\chi'_* = \text{Id}$ en cohomologie. Ainsi, $\chi_* = \text{Id}$ en cohomologie.

D'un autre côté, en vue de sa définition, χ est conjugué avec $\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}$ via les trivialisations Ψ_x , $\Psi_{\bar{x}}$, ce qui assure que $\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}$ induit un isomorphisme en cohomologie. On récupère aussi une deuxième preuve du fait que $\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}$ est un morphisme de complexes différentiels.

□

La preuve du Lemme 3.3.7 fournit une description précise du morphisme induit par $\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}$ en cohomologie : il peut être calculé comme le morphisme induit en cohomologie par le transport parallèle entre F_x et $F_{\bar{x}}$, ce dernier étant déterminé par la *connexion triviale* induite par une trivialisatıon à bouts fixés de $E_{|\text{im}\gamma}$. Le lemme ci-dessous montre que cela coıncide avec le transport parallèle le long de γ dans le système local de Leray-Serre, modulo identification de la cohomologie de Morse avec la cohomologie singulière.

Lemme 3.3.8. *Soit γ une trajectoire dans B allant de \bar{x} à x . Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{Morse}}^q(F_x) & \xrightarrow{\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}} & H_{\text{Morse}}^q(F_{\bar{x}}) \\ A_x \downarrow & & \downarrow A_{\bar{x}} \\ H^q(F_x) & \xrightarrow{\Lambda_{\gamma}^{\bar{x},x}} & H^q(F_{\bar{x}}) \end{array}$$

où $\Lambda_{\gamma}^{\bar{x},x} : H^q(F_x) \xrightarrow{\sim} H^q(F_{\bar{x}})$ est l'isomorphisme du système local de Leray-Serre défini dans l'exemple 3.2.5 et $A_{x(\bar{x})}$ sont les isomorphismes canoniques du corollaire 3.2.19 correspondant aux orientations des variétés instables dans $F_{x(\bar{x})}$ induites par les trivialisations $\Psi_{x(\bar{x})}$.

Démonstration. Deux diagrammes commutatifs donnent la preuve. On a d'abord

$$\begin{array}{ccccc} H_{\text{Morse}}^q(F_x) & & \xrightarrow{\Phi_{\gamma}^{\bar{x},x}} & & H_{\text{Morse}}^q(F_{\bar{x}}) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & H_{\text{Morse}}^q(F) & & \\ & \downarrow A & & \downarrow A_{\bar{x}} & \\ H^q(F_x) & \xrightarrow{\Psi_x^{*-1}} & H^q(F) & \xleftarrow{\Psi_{\bar{x}}^{*-1}} & H^q(F_{\bar{x}}) \end{array}$$

avec A l'isomorphisme canonique du corollaire 3.2.19 et les flèches allant vers la partie centrale étant induites par une trivialisatıon Ψ de $E_{|\text{im}\gamma}$ qui coıncide avec $\Psi_{x(\bar{x})}$ aux voisinages de $x(\bar{x})$, comme dans la démonstration du lemme 3.3.7. Le triangle supérieur est commutatif toujours par le lemme 3.3.7.

D'un autre côté, l'isomorphisme $\Psi_{\bar{x}}^* \circ \Psi_x^{*-1} : H^q(F_x) \rightarrow H^q(F_{\bar{x}})$ qu'on lit sur la ligne inférieure du diagramme précédent est égal à $\Lambda_{\gamma}^{\bar{x},x}$, comme on le voit par le diagramme ci-dessous, où U représente une boule ouverte contenant $\text{im}\gamma$ au-dessus de laquelle on étend la trivialisatıon Ψ .

$$\begin{array}{ccccc} H^q(F_x) & \xleftarrow{i_x^*} & H^q(E|_U) & \xrightarrow{i_{\bar{x}}^*} & H^q(F_{\bar{x}}) \\ \uparrow & & \uparrow \Phi^* & & \uparrow \\ H^q(\{x\} \times F) & \xleftarrow{\quad} & H^q(U \times F) & \xrightarrow{\quad} & H^q(\{\bar{x}\} \times F) \\ & \swarrow & \uparrow \pi^* & \searrow & \\ & & H^q(F) & & \end{array}$$

L'isomorphisme $\Psi_{\bar{x}}^* \circ \Psi_x^{*-1}$ est lu sur la partie inférieure du diagramme, tandis que $\Lambda_{\gamma}^{\bar{x},x} = i_{\bar{x}}^* \circ i_x^{*-1}$ par définition.

□

Dans la section 3.3.4 nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 3.3.9. *a) Il existe un unique système local sur B dont les fibres aux points critiques de f sont $H_{\text{Morse}}^q(F_x)$, $x \in \text{Crit}(f)$ et dont le transport par parallélisme le long des trajectoires est donné par les $\Phi_\gamma^{x,x}$. On le notera $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$.*

b) Le système d'isomorphismes $(A_x : H_{\text{Morse}}^q(F_x) \xrightarrow{\sim} H^q(F_x))_{x \in \text{Crit}(f)}$ s'étend uniquement à un isomorphisme de systèmes locaux entre $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ et le système de Leray-Serre $\mathcal{H}^q(F)$.

Nous pouvons maintenant donner la

Démonstration du théorème 3.3.1. Les propriétés préliminaires requises sur la fonction f_ϵ et sur le champ de vecteurs X_ϵ sont claires par construction. Pour ce qui est de a), le calcul de E_1 a déjà été fait dans (3.16) et l'identification $d_1 = \delta_{\text{Cell}}$ est une conséquence directe des expressions (3.10) et (3.19). La proposition 3.3.9 assure par conséquent l'identification $E_2^{p,q} \simeq H^p(B ; \mathcal{H}^q(F))$.

Démontrons maintenant le point b). L'identification entre cohomologie de Morse et cohomologie cellulaire et l'isomorphisme des systèmes de coefficients $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ et $\mathcal{H}^q(F)$ entraîne déjà l'isomorphisme de bicomplexes différentiels

$$(E_1^{*,*}, d_1) \simeq ({}_{LS}E_1^{*,*}, {}_{LS}d_1) .$$

On prouve l'isomorphisme des suites spectrales en démontrant l'isomorphisme des couples exacts au rang $r = 1$. On a

$${}_{LS}A_1 = \oplus_{p \geq 0} H(E, E^{p-1}) ,$$

$$A_1 = \oplus_{p \geq 0} H(C_p)$$

et l'isomorphisme $H(C_p) \simeq H(E, E^{p-1})$ découle du fait que les deux membres sont isomorphes à l'homologie cellulaire relative $H_{\text{Cell}}(E, E_{p-1})$ (voir la remarque 3.2.10 pour la définition de cette dernière). Les flèches i_1 , j_1 et k_1 ainsi que le terme B_1 ont déjà été explicités et sont respectivement isomorphes. On en déduit l'isomorphisme des deux suites spectrales.

□

3.3.4 Systèmes pré-locaux

Nous étendons légèrement la notion de système local de la section 3.2.2 en définissant les *systèmes pré-locaux*, des objets adaptés au cadre de l'homologie de Morse. Notre but est de démontrer la Proposition 3.3.9. Rappelons que $\mathcal{P}(B)$ désigne l'espace des chemins continus dans un espace topologique B .

Définition 3.3.10. *Soit A un anneau et M un A -module. Un système pré-local de fibre M sur l'espace topologique B est constitué par la donnée des éléments suivants.*

1. *un sous-ensemble $C \subset B$ et une copie M_x de M pour tout $x \in C$;*
2. *un sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(B)$ tel que*
 - *si $\alpha \in \mathcal{P}$, alors $\alpha(0), \alpha(1) \in C$;*

- pour tout $x \in C$, le chemin \underline{x} constant égal à x appartient à \mathcal{P} ;
- $\alpha \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\alpha^{-1} \in \mathcal{P}$;
- si $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ et $\alpha(1) = \beta(0)$ alors $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{P}$;

3. une famille d'isomorphismes $\Phi = (\Phi_\alpha : M_{\alpha(0)} \xrightarrow{\sim} M_{\alpha(1)})_{\alpha \in \mathcal{P}}$ telle que

- si $\alpha \simeq \beta$ sont deux chemins homotopes à bouts fixés, alors $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$;
- si $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$ et $\alpha(1) = \beta(0)$ alors $\Phi_{\alpha \cdot \beta} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha$.

Si \mathcal{M} est un système pré-local comme dans la définition 3.3.10, on appelle *support de \mathcal{M}* le couple (C, \mathcal{P}) . On le note $\mathcal{S}(\mathcal{M})$.

Pour tout couple $\mathcal{S} = (C, \mathcal{P})$ satisfaisant la condition 2 de la définition 3.3.10 et pour tout $x_0 \in C$ on définit

$$\mathcal{L}(x_0) := \{\alpha \in \mathcal{P} : \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\} .$$

Définition 3.3.11. *Le groupe fondamental de \mathcal{M} basé en $x_0 \in C$ est l'ensemble des classes d'homotopie (dans B) de lacets dans $\mathcal{L}(x_0)$ avec la multiplication induite par l'adjonction des chemins. On le note $\pi_1(\mathcal{M}, x_0)$, ou encore $\pi_1(\mathcal{S}(\mathcal{M}), x_0)$ pour mettre en évidence le fait qu'il ne dépend que du support de \mathcal{M} .*

On remarque l'inclusion tautologique

$$(3.20) \quad \pi_1(\mathcal{M}, x_0) \hookrightarrow \pi_1(B, x_0) .$$

La définition de $\pi_1(\mathcal{M}, x_0)$ est motivée par le fait que tout système pré-local \mathcal{M} induit une représentation

$$\chi_{\mathcal{M}, x_0} : \pi_1(\mathcal{M}, x_0) \longrightarrow \text{Aut } M_{x_0} .$$

La réciproque est plus lourde à formuler que dans le cas des systèmes locaux à cause du fait que la définition n'exclut pas l'existence de points dans C qui ne sont pas connectés par un chemin dans \mathcal{P} . Prenons $\mathcal{S} = (C, \mathcal{P})$ satisfaisant à la condition 2 de la définition 3.3.10. Pour $x_0 \in C$ on pose

$$C(x_0) = \{x \in C : \text{il existe } \alpha \in \mathcal{P} \text{ avec } \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x\} ,$$

$$\mathcal{P}(x_0) = \{\alpha \in \mathcal{P} : \alpha(0), \alpha(1) \in C(x_0)\} ,$$

$$\mathcal{S}(x_0) = (C(x_0), \mathcal{P}(x_0)) .$$

On appelle $C(x_0)$ la *composante de x_0 par rapport à \mathcal{P}* . On dit que le système pré-local \mathcal{M} est à *support connexe* si $\mathcal{S}(x_0) = \mathcal{S}(\mathcal{M})$ pour un point $x_0 \in C$ arbitraire. Cela est alors vrai pour n'importe quel point $x \in C$.

Le couple $\mathcal{S}(x_0)$ satisfait toujours à la condition 2 et $\pi_1(\mathcal{S}, x_0) = \pi_1(\mathcal{S}(x_0), x_0)$. De plus, toute représentation

$$\chi : \pi_1(\mathcal{S}, x_0) \longrightarrow \text{Aut } M$$

détermine un unique système pré-local $\mathcal{M}(x_0)$ dont le support est $\mathcal{S}(x_0)$ et tel que $M_{x_0} = M$ et $\chi = \chi_{\mathcal{M}, x_0}$.

La proposition ci-dessous montre que l'unicité peut faire défaut si l'on veut construire des systèmes locaux de support $\mathcal{S} \supsetneq \mathcal{S}(x_0)$.

Définition 3.3.12. Soient $\mathcal{M} = (C, \mathcal{P}, \Phi)$ et $\mathcal{M}' = (C', \mathcal{P}', \Phi')$ deux systèmes pré-locaux. On dit que \mathcal{M}' est une extension de \mathcal{M} si $C \subset C'$, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ et $\Phi \subset \Phi'$. On écrit dans ce cas $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$.

Proposition 3.3.13. Soit \mathcal{M} un système pré-local sur B dont le support est connexe. Toute extension de \mathcal{M} à un système local sur B correspond à une et une seule factorisation

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{M}, x_0) & \xrightarrow{\quad} & \text{Aut } M_{x_0} \\ & \searrow & \nearrow \text{dotted} \\ & \pi_1(B, x_0) & \end{array}$$

On voit en particulier que \mathcal{M} admet une extension unique si $\pi_1(\mathcal{M}, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, x_0)$ est un isomorphisme. Le résultat n'est évidemment plus valable si le support de \mathcal{M} n'est pas connexe, vu que la représentation $\pi_1(\mathcal{M}, x_0) \longrightarrow \text{Aut } M_{x_0}$ ne détermine même pas le système pré-local \mathcal{M} .

Démonstration. La proposition est presque tautologique. De façon évidente, une extension à un système local sur B induit une telle factorisation. D'un autre côté, puisqu'un système local est uniquement déterminé par la représentation associée, la factorisation est nécessairement unique. \square

Pour une fibration comme dans la section 3.3.1, la donnée des trajectoires de gradient sur la base et des morphismes de transport parallèle $\Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x}$ détermine un système pré-local

$$(3.21) \quad \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F) = (C, \mathcal{P}, \Phi^q)$$

dont la fibre est $H_{\text{Morse}}^q(F)$, appelé *système pré-local de Morse-Smale cohomologique*. On pose

$$C = \text{Crit}(f), \quad \mathcal{P} = \langle \text{trajectoires de gradient négatif d'indice 1} \rangle_{\text{Crit}(f)}$$

où, pour $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(B)$ et $C \subset B$, la notation $\langle \mathcal{R} \rangle_C$ désigne la partie minimale de $\mathcal{P}(B)$ qui contient \mathcal{P} et qui satisfait à la condition 2 de la définition 3.3.10. Dans le cas ci-dessus, \mathcal{P} est constitué de chaînes de trajectoires d'indice 1. On définit la famille d'isomorphismes

$$\Phi^q = (\Phi_{\alpha} : H_{\text{Morse}}^q(F_{\alpha(0)}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Morse}}^q(F_{\alpha(1)}))_{\alpha \in \mathcal{P}}$$

sur les générateurs de \mathcal{P} comme

$$\Phi_{\gamma} = \Phi_{\gamma}^{\bar{x}, x}, \quad \text{si } \gamma \text{ trajectoire d'indice 1 de } \bar{x} \text{ à } x.$$

On pose $\Phi_{\gamma^{-1}} = \Phi_{\gamma}^{-1}$ et on étend la définition à toute juxtaposition de trajectoires ou de leurs inverses par composition des morphismes correspondants.

On définit aussi le système pré-local

$$\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F) = (C', \mathcal{P}', \Phi^q|)$$

en posant $C' = \{x \in \text{Crit}(f) : \text{ind}(x) = 0 \text{ ou } \text{ind}(x) = 1\}$ et $\mathcal{P}' = \langle \text{trajectoires de gradient négatif d'indice 1} \rangle_{C'}$, alors que $\Phi^q|$ désigne la restriction de Φ^q . Comme nous le verrons plus bas, le système $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ porte toute l'information intéressante pour ce qui est des extensions de $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$.

Lemme 3.3.14. a) Pour tout entier $q \geq 0$, les triplets $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ et $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ définissent deux systèmes pré-locaux de fibre $H_{\text{Morse}}^q(F)$, tels que $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ est une extension de $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ au sens de la définition 3.3.12. Si la base B est connexe, alors $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ est à support connexe.

b) Soit $x_0 \in \text{Crit}(f)$, $\text{ind}(x_0) = 0$. Les inclusions

$$\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \longrightarrow \pi_1(B, x_0)$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. a) Pour montrer que $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ est un système pré-local il suffit de vérifier la condition 3 de la définition. La deuxième sous-condition est réalisée par construction des Φ_α , tandis que la première découle du fait que les $\Phi_\gamma^{\bar{x}, x}$ sont conjugués aux morphismes de transport parallèle $\Lambda_\gamma^{\bar{x}, x}$ du système de Leray-Serre. Comme ces derniers sont invariants par homotopie, il en est de même pour les Φ_γ . Le même argument prouve que $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ est un système pré-local. Le fait que $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ est une extension de $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ est clair par définition.

Pour montrer que le support de $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ est connexe on utilise le fait que les variétés instables de $-\nabla f$ déterminent une structure de CW-complexe sur B . Soit B^k le k -squelette de B , à savoir

$$B^k = \bigcup_{\text{ind}(x) \leq k} \overline{W}^u(x).$$

La base B est connexe si et seulement si le 1-squelette B^1 est connexe. Or cela équivaut, par définition, à la connexité du support de $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$.

b) Ceci est une conséquence du fait que, pour un CW-complexe, le 1-squelette représente le groupe fondamental. On prouve ci-dessous que la flèche composée $\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \longrightarrow \pi_1(B, x_0)$ est un isomorphisme. De ce fait la flèche $\pi_1(\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \longrightarrow \pi_1(B, x_0)$ est surjective. Comme c'est de toutes façons une injection, on déduit que c'est un isomorphisme, de même que $\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F), x_0)$.

Les groupes $\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0)$ et $\pi_1(B, x_0)$ dépendent uniquement de la composante connexe de x_0 dans B . On peut donc supposer d'emblée que B est connexe. Un résultat classique (voir par exemple [BT], p. 147) assure que la flèche $\pi_1(B^2, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, x_0)$ induite par l'inclusion $B^2 \hookrightarrow B$ est un isomorphisme, tandis que $\pi_1(B^1, x_0) \longrightarrow \pi_1(B^2, x_0)$ est surjective. Vu que B^1 a le même type d'homotopie qu'un bouquet de cercles on déduit que $\pi_1(B^1, x_0)$ est le groupe libre engendré par un certain nombre de lacets ayant x_0 comme point base et réalisables par des chaînes de trajectoires (ou leurs inverses) reliant des points d'indice 1 à des points d'indice 0. L'application $\pi_1(B^1, x_0) \longrightarrow \pi_1(B^2, x_0)$ factorise alors par $\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0)$ et donc $\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \longrightarrow \pi_1(B^2, x_0)$ est surjective. L'injectivité est toujours vraie (3.20) et la proposition est démontrée. \square

On est maintenant en mesure de donner la

Démonstration de la proposition 3.3.9:

a) Le support de $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ est connexe et l'isomorphisme $\pi_1(\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(B, x_0)$ assure que $\mathcal{G}_{\text{Morse}}^q(F)$ s'étend de manière unique à un système local sur B . De ce fait, $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)$ s'étend aussi de manière unique à un système local sur B . Il correspond à la représentation $\rho_{x_0} : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \text{Aut } H_{\text{Morse}}^q(F_{x_0})$ induite par l'isomorphisme $\pi_1(\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(B, x_0)$.

b) Montrer l'isomorphisme avec le système de Leray-Serre revient à démontrer un isomorphisme de représentations. Soit $A : H_{\text{Morse}}^q(F_{x_0}) \xrightarrow{\sim} H^q(F_{x_0})$ l'isomorphisme canonique déterminé par le choix d'orientations des variétés instables dans F_{x_0} et posons

$$\chi_A : \text{Aut } H^q(F_{x_0}) \xrightarrow{\sim} \text{Aut } H_{\text{Morse}}^q(F_{x_0}) ,$$

$$\chi_A(g)(x) = g(Ax) .$$

Alors on a tout de suite le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F), x_0) & \xrightarrow{\quad} & \text{Aut } H_{\text{Morse}}^q(F_{x_0}) \\ & \searrow & \nearrow \sim \\ & \text{Aut } H^q(F_{x_0}) & \nearrow \chi_A \end{array}$$

qui induit

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{\rho_{x_0}} & \text{Aut } H_{\text{Morse}}^q(F_{x_0}) \\ & \searrow \rho_{\text{can}} & \nearrow \sim \\ & \text{Aut } H^q(F_{x_0}) & \nearrow \chi_A \end{array}$$

□

3.3.5 Transversalité

Le but de cette section est de fournir une démonstration de la Proposition 3.3.4. La démarche est similaire à celle de Pozniak [Po] ou Salamon [S2] qui prouvent, dans une variété fermée, la généricité des métriques pour lesquelles le flot de gradient d'une fonction de Morse donnée vérifie la condition de transversalité de Morse-Smale.

Nous rappelons les notations de la section 3.3.2. On se donne des fonctions de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ dont les champs de gradient sont de Morse-Smale par rapport à des métriques g et h respectivement. On fixe des trivialisations $\Psi_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times F$ autour des points critiques de f telles que les \overline{U}_i soient deux à deux disjoints. On note $X_\epsilon = -\nabla \tilde{f} - \epsilon \sum_i \tilde{\rho}_i \nabla f_i$, avec $\rho_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ des fonctions de troncature et $f_i = \varphi \circ \text{pr}_2 \circ \Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$. On fixe une métrique ρ_0 sur E telle que $\rho_0|_{H_{\rho_0}} = \pi^*g$, $\Psi_{i*}H_{\rho_0}$ est la distribution horizontale $\ker \text{pr}_{2*}$ sur $U_i \times F$ et $\rho_0|_V = \Psi_i^*h$ sur $\pi^{-1}(U_i)$. On pose

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \rho \text{ métrique sur } E : \rho|_{H_\rho} = \pi^*g, \quad \rho = \rho_0 \text{ sur } \bigcup \pi^{-1}(\overline{U}_i), \quad \rho = \rho_0 \text{ sur } V \right\} .$$

Il s'agit de montrer qu'il existe un sous-ensemble résiduel de métriques de \mathcal{R}_0 par rapport auxquelles X_ϵ est de Morse-Smale.

On pose $N = {}^c(\bigcup \pi^{-1}(\overline{U}_i))$ et $\tilde{N} = \pi^{-1}(N)$. On note $H_0 = H_{\rho_0}$. Les métriques de \mathcal{R}_0 s'obtiennent en variant la distribution horizontale dans \tilde{N} . Comme tout espace horizontal est le graphe d'une unique application linéaire de H_0 dans V on considère

$$C_\epsilon^\infty(\text{Hom}(H_0, V)) \subset C^\infty(\text{Hom}(H_0, V)) ,$$

défini comme l'espace de toutes les sections $L \in C^\infty(\text{Hom}(H_0, V))$ telles que

$$\|L\|_\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \|L\|_{C^k(E)} < +\infty ,$$

les normes étant considérées par rapport à la métrique fixée ρ_0 . Pour une suite (ϵ_k) qui décroît suffisamment vite vers zéro, l'espace $C^\infty_\epsilon(\text{Hom}(H_0, V))$ est un espace de Banach séparable et dense dans $L^2(\text{Hom}(H_0, V))$ (cf. Floer [F2]). Posons

$$L_{(\epsilon)}(\tilde{N}) = \left\{ L \in C^\infty_\epsilon(\text{Hom}(H_0, V)) : L|_{e_{\tilde{N}}} = 0 \right\} .$$

On voit tout de suite que \mathcal{R}_0 est en bijection avec $L(\tilde{N})$: une métrique $\rho \in \mathcal{R}_0$ est uniquement déterminée par sa distribution horizontale dans \tilde{N} , qui correspond de façon unique au graphe d'un élément $L \in L(\tilde{N})$. On appellera ρ_L la métrique correspondant à L .

Le théorème ci-dessous fournit le lien entre analyse et géométrie des espaces de trajectoires, en exprimant la transversalité des variétés stables et instables en termes d'opérateurs de Fredholm. Pour une courbe γ dans E , on note $W^{1,2}(\gamma)$ et $L^2(\gamma)$ les espaces de sections $W^{1,2}$ et L^2 de γ^*TE muni de la métrique ρ_0 .

Théorème 3.3.15 ([S2]). *Soient x^- et x^+ des points critiques de f_ϵ , ρ une métrique sur E et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ une trajectoire telle que $\dot{\gamma} - X_\epsilon(\gamma) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma(t) = x^\pm$. Alors l'opérateur*

$$D_\gamma^\rho : W^{1,2}(\gamma) \rightarrow L^2(\gamma) ,$$

$$\xi \mapsto \nabla_{\dot{\gamma}}^\rho \xi - \nabla_\xi^\rho X_\epsilon$$

est Fredholm et $\text{ind}(D_\gamma^\rho) = \text{ind}(x^-) - \text{ind}(x^+)$. De plus, D_γ^ρ est surjectif si et seulement si $W^u(x^-) \pitchfork W^s(x^+)$ le long de γ .

Le théorème suivant sera alors suffisant pour obtenir la transversalité de Morse-Smale pour un ensemble résiduel de métriques dans \mathcal{R}_0 .

Théorème 3.3.16. *Soient $x^-, x^+ \in \text{Crit}(f_\epsilon)$ appartenant à des fibres distinctes. L'ensemble des $L \in L_\epsilon(\tilde{N})$ tels que $D_\gamma^{\rho_L}$ est surjectif pour toute trajectoire de x^- à x^+ est résiduel dans $L_\epsilon(\tilde{N})$.*

Démonstration du théorème 3.3.16. Il est commode de regarder une métrique $\rho \in C^\infty(\text{Sym}^2 T^*E)$ comme un élément de $C^\infty(\text{Iso}(TE, T^*E))$. On a

$$X_\epsilon^{\rho_0} = -\rho_0^{-1} d\tilde{f} - \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \rho_0^{-1} df_i$$

et, si L est un élément de $L(\tilde{N})$, alors

$$X_\epsilon^{\rho_L} = -\rho_0^{-1} d\tilde{f} \oplus L\rho_0^{-1} d\tilde{f} - \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \rho_0^{-1} df_i .$$

On définit

$$\mathcal{Z} = \{(\gamma, L) \in \mathcal{P} \times L_\epsilon(\tilde{N}) : \mathcal{F}(\gamma, L) = 0\} ,$$

$$\mathcal{F}(\gamma, L) = \dot{\gamma} + \rho_0^{-1} d\tilde{f} \oplus L\rho_0^{-1} d\tilde{f} + \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \rho_0^{-1} df_i$$

avec \mathcal{P} l'espace des courbes $\mathbb{R} \rightarrow E$ reliant x^- à x^+ muni de la topologie $W^{1,2}$.

On prouve en premier lieu que \mathcal{Z} est une sous-variété de Banach dans $\mathcal{P} \times L_\epsilon(\tilde{N})$. Le calcul fondamental est celui de

$$d\mathcal{F}_{(\gamma, L_0)} : W^{1,2}(\gamma) \times L_\epsilon(\tilde{N}) \rightarrow L^2(\gamma) .$$

On a successivement

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}_{(\gamma, L_0)}(\xi, L) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(\frac{d}{dt} \exp_{\gamma(t)} s\xi(t) + (\rho_0^{-1} d\tilde{f} \oplus (L_0 + sL)\rho_0^{-1} d\tilde{f} + \epsilon \sum \tilde{\rho}_i \rho_0^{-1} df_i) \right) \Big|_{\exp_{\gamma(t)} s\xi(t)} \\ &= \nabla_{\dot{\gamma}}^{\rho_{L_0}} \xi - \nabla_{\xi}^{\rho_{L_0}} X_\epsilon + L\rho_0^{-1} d\tilde{f} \\ &= D_\gamma^{\rho_{L_0}} \xi + L\nabla^{\rho_0} \tilde{f} . \end{aligned}$$

On note $D_2\mathcal{F} : L_\epsilon(\tilde{N}) \rightarrow L^2(\gamma)$ l'opérateur $L \mapsto L\nabla^{\rho_0} \tilde{f}$, de sorte qu'on peut écrire

$$d\mathcal{F}_{(\gamma, L_0)}(\xi, L) = D_\gamma^{\rho_{L_0}}(\xi) + D_2\mathcal{F}(L) .$$

Par le théorème des fonctions implicites, on aura prouvé que \mathcal{Z} est une sous-variété de Banach si l'on montre que $d\mathcal{F}$ est surjective et à noyau supplémenté le long de \mathcal{Z} . On soulignera ci-après le fait que $d\mathcal{F}$ est considérée en un point $(\gamma, L_0) \in \mathcal{Z}$ fixé.

a) le noyau de $d\mathcal{F}$ est supplémenté. L'opérateur $D_\gamma^{\rho_{L_0}}$ est de Fredholm et son noyau admet un supplémentaire fermé V_1 puisqu'il est de dimension finie :

$$W^{1,2}(\gamma) = \ker D_\gamma^{\rho_{L_0}} \oplus V_1 .$$

On vérifie sans peine $\ker d\mathcal{F} \cap V_1 = \{0\}$ donc $d\mathcal{F}^{-1}(\text{im } D_\gamma^{\rho_{L_0}}) = \ker d\mathcal{F} \oplus V_1$. Ceci implique d'ailleurs

$$\text{codim}(\ker d\mathcal{F} \oplus V_1) = \text{codim}(\text{im } D_\gamma^{\rho_{L_0}}) < +\infty$$

et donc l'existence d'un supplémentaire W_1 de dimension finie - donc fermé - pour $\ker d\mathcal{F} \oplus V_1$. Alors $\ker d\mathcal{F}$ admet comme supplémentaire fermé $V_1 \oplus W_1$.

b) $d\mathcal{F}$ est surjectif. Puisque $\text{im } d\mathcal{F} \supset \text{im } D_\gamma^{\rho_{L_0}}$ et cette dernière est fermée et de codimension finie, on déduit que $\text{im } d\mathcal{F}$ est fermée. Il suffit de montrer que son orthogonal dans $L^2(\gamma)$ est nul. Soit donc $\eta \in L^2(\gamma)$ tel que $\langle d\mathcal{F}(\xi, L), \eta \rangle = 0$ pour tous $\xi \in W^{1,2}(\gamma)$, $L \in L_\epsilon(\tilde{N})$. Ceci équivaut à

$$\begin{cases} \langle D_\gamma^{\rho_{L_0}} \xi, \eta \rangle = 0, & \forall \xi \in W^{1,2}(\gamma) \\ \langle L\nabla^{\rho_0} \tilde{f}, \eta \rangle = 0, & \forall L \in L_\epsilon(\tilde{N}) \end{cases}$$

La première identité entraîne $|\langle \nabla \xi, \eta \rangle| = |\langle \nabla_\xi X_\epsilon, \eta \rangle| \leq C \cdot \|\xi\|_{L^2} \cdot \|\eta\|_{L^2}$. Un argument standard de théorie des distributions montre que $\eta \in W^{1,2}(\gamma)$ et $D_\gamma^* \eta = 0$, avec $D_\gamma^* : W^{1,2}(\gamma) \rightarrow L^2(\gamma)$ l'adjoint formel de D_γ , donné par

$$D_\gamma^* \eta = -\nabla_{\dot{\gamma}} \eta - \nabla_\eta X_\epsilon - \epsilon \left(\iota_\eta \left(\sum_i d\tilde{\rho}_i \wedge df_i \right) \right)^\flat .$$

Le champ η vérifie donc l'équation différentielle ordinaire $D_\gamma^* \eta = 0$ le long de γ . Par unicité des solutions, il suffit de montrer $\eta|_{\gamma \cap \tilde{N}} = 0$ pour conclure que $\eta = 0$. Supposons par l'absurde qu'il

existe t_0 tel que $\eta(t_0) \neq 0$ et $\gamma(t_0) \in \tilde{N}$. Nous allons montrer que $\eta(t_0) \notin H$. La partie verticale de $\eta(t_0)$ étant non nulle, on peut alors trouver L à support dans \tilde{N} qui vérifie $\langle L\nabla^0 f, \eta \rangle \neq 0$, ce qui fournit la contradiction désirée. Il est à remarquer qu'un tel L n'existerait pas si $\eta \in H$.

Supposons alors par l'absurde que $\eta \in H$ le long de $\gamma \cap \tilde{N}$. Nous allons montrer que tout champ de vecteurs horizontal le long de $\gamma \cap \tilde{N}$ peut être obtenu comme restriction d'un champ de $\text{im } d\mathcal{F}$. Ceci reste en particulier vrai pour η tronqué à $\gamma \cap \tilde{N}$ et on aura obtenu une contradiction avec $\eta \in (\text{im } d\mathcal{F})^\perp$.

Nous utilisons l'hypothèse de transversalité sur ∇f . Pour un champ de vecteurs ξ sur B on dénote par $\tilde{\xi}$ son relevé horizontal par rapport à la distribution H_{L_0} . Dans \tilde{N} on a

$$\begin{aligned} D_\gamma^{\rho_{L_0}} \tilde{\xi} &= \nabla_{\dot{\gamma}}^{\rho_{L_0}} \tilde{\xi} + \nabla_{\tilde{\xi}}^{\rho_{L_0}} \nabla^{\rho_{L_0}} f = \nabla_{\dot{\gamma}}^{\rho_{L_0}} \tilde{\xi} + \nabla_{\tilde{\xi}}^{\rho_{L_0}} \tilde{\nabla} f \\ &= -\nabla_{\tilde{\nabla} f} \tilde{\xi} + \nabla_{\tilde{\xi}} \tilde{\nabla} f = [\tilde{\xi}, \tilde{\nabla} f]. \end{aligned}$$

Or $\pi_*[\tilde{\xi}, \tilde{\nabla} f] = [\pi_*\tilde{\xi}, \pi_*\tilde{\nabla} f] = [\xi, \nabla f] = D_{\pi(\gamma)}^g \xi$. La condition de transversalité sur ∇f assure que $D_{\pi(\gamma)}^g$ est surjectif et donc la composante horizontale de $D_\gamma^{\rho_{L_0}}$ peut être quelconque. La composante verticale peut être annulée par un choix adapté de L et on déduit que $\text{im } d\mathcal{F}$ contient au-dessus de \tilde{N} tous les champs horizontaux. Ceci achève la preuve du fait que $d\mathcal{F}$ est surjectif.

On considère maintenant la projection

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{Z} &\longrightarrow L_\epsilon(\tilde{N}), \\ (\gamma, L) &\longmapsto L \end{aligned}$$

et on prouve que

$$d\pi : T_{(\gamma, L_0)} \mathcal{Z} = \ker d\mathcal{F}(\gamma, L_0) \longrightarrow L_\epsilon(\tilde{N})$$

est Fredholm avec $\text{coker } d\pi \simeq \text{coker } D_\gamma$. En effet, on a $\ker d\pi = \ker D_\gamma$, $\text{im } d\pi = D_2\mathcal{F}^{-1}(\text{im } D_\gamma)$ et, comme $d\mathcal{F}$ est surjective,

$$\text{coker } D_\gamma \simeq \frac{L^2(\gamma)}{\text{im } D_\gamma} \simeq \frac{W^{1,2}(\gamma) \times L_\epsilon(\tilde{N})}{d\mathcal{F}^{-1}(\text{im } D_\gamma)} = \frac{W^{1,2}(\gamma) \times L_\epsilon(\tilde{N})}{W^{1,2}(\gamma) \times D_2\mathcal{F}^{-1}(\text{im } D_\gamma)} \simeq \frac{L_\epsilon(\tilde{N})}{\text{im } d\pi} \simeq \text{coker } d\pi.$$

On déduit que L est une valeur régulière pour π si et seulement si $D_\gamma^{\rho_L}$ est surjectif pour toute γ telle que $\mathcal{F}(\gamma, L) = 0$. Le théorème de Sard-Smale [Sm3] assure que l'ensemble des valeurs régulières d'une application de Fredholm est résiduel et ceci achève la preuve du théorème 3.3.16. □

Nous pouvons maintenant donner la

Démonstration de la proposition 3.3.4. En appliquant le théorème 3.3.16 pour tous les couples possibles $x^-, x^+ \in \text{Crit}(f_\epsilon)$ on trouve un ensemble résiduel dans $L_\epsilon(\tilde{N})$ tel que $W^u(x^-) \cap W^s(x^+)$ dès que x^- et x^+ appartiennent à des fibres différentes. La forme de X_ϵ est prescrite au voisinage des fibres critiques et la condition de transversalité est évidemment vérifiée si x^- et x^+ appartiennent à la même fibre. Par conséquent, la condition de transversalité de Morse-Smale est vérifiée le long de toute trajectoire.

On a donc un ensemble dense dans $L_\epsilon(\tilde{N})$ qui, à son tour, est dense dans $L(\tilde{N})$ pour la topologie L^2 . Comme la convergence en norme C_ϵ^∞ entraîne la convergence L^2 , on déduit que l'ensemble résiduel trouvé est dense dans \mathcal{R}_0 pour la topologie L^2 . □

3.4 Variétés à bord

La suite spectrale de Leray-Serre peut être construite pour une fibration à bord avec quelques modifications mineures. Le point central est le

Théorème 3.4.1. *Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété E compacte avec bord, X un champ de pseudo-gradient négatif par rapport à f et \mathcal{M} un système local sur E . On suppose que X est standard au voisinage des points critiques et vérifie la condition de transversalité de Morse-Smale. Si X pointe vers l'intérieur le long de ∂E alors*

$$H^p(C_{\text{Morse}}^*(E, X; \mathcal{M})) \simeq H^p(E; \mathcal{M}), \quad p \geq 0.$$

Si X pointe vers l'extérieur le long de ∂E et E est une variété orientable alors

$$H^p(C_{\text{Morse}}^*(E, X; \mathcal{M})) \simeq H^p(E, \partial E; \mathcal{M}), \quad p \geq 0.$$

Les isomorphismes ne dépendent que du choix d'orientations pour les variétés instables de X , ainsi que du choix d'une orientation pour E dans le second cas.

Remarque. La fonction f intervient uniquement pour donner la graduation sur le complexe de Morse. Comme indiqué par la notation $C_{\text{Morse}}^*(E, X; \mathcal{M})$ la différentielle ne dépend par ailleurs que du champ X .

Démonstration. Traitons d'abord le cas où X pointe vers l'intérieur le long de ∂E . La remarque cruciale à faire est que les variétés instables ne rencontrent pas le bord ∂E . Or le champ X est standard au voisinage des points critiques et vérifie la condition de transversalité de Morse-Smale, ce qui assure que les variétés instables déterminent un CW-complexe K à l'intérieur de E . La démonstration du 3.2.19 s'applique à K pour montrer que la (co)homologie du complexe de Morse est isomorphe à la (co)homologie de K . Il suffit maintenant d'observer que le CW-complexe K est rétracte par déformation de E le long des lignes de flot qui rencontrent ∂E . Cela assure $H^*(E) \simeq H^*(K)$ et la première affirmation du théorème est démontrée.

Supposons maintenant que X pointe vers l'extérieur le long du bord. Le champ de vecteurs $X_1 = -X$ pointe vers l'intérieur et est un pseudo-gradient négatif vérifiant les hypothèses du théorème pour la fonction $f_1 = -f$. Le complexe de Morse pour X est dual au complexe de Morse de X_1 qui, lui, calcule la (co)homologie de E . On obtient ainsi

$$H^p(C_{\text{Morse}}^*(E, X; \mathcal{M})) \simeq H_{m-p}(C_{\text{Morse}}^*(E, X_1; \mathcal{M})) \simeq H_{m-p}(E; \mathcal{M}), \quad m = \dim E.$$

La dualité de Poincaré fournit $H_{m-p}(E; \mathcal{M}) \simeq H^p(E, \partial E; \mathcal{M})$ et achève la preuve. \square

Remarque. Si la variété E n'est pas orientable et le champ X pointe vers l'extérieur le long de ∂E , la conclusion du théorème s'écrit

$$(3.22) \quad H^p(C_{\text{Morse}}^*(E, X; \mathcal{M})) \simeq H^p(E, \partial E; \mathcal{M} \otimes \mathfrak{o}_A), \quad p \geq 0.$$

Ici \mathcal{M} est un système local de A -modules et la notation \mathfrak{o}_A désigne le système local des orientations de fibre A i.e. le système local correspondant à la représentation $\pi_1(E, x_0) \rightarrow \text{Aut}(A)$, $x_0 \in E$ donnée par $\gamma \mapsto \pm \text{Id}$ selon que γ préserve ou, respectivement, renverse l'orientation. L'isomorphisme (3.22) est une conséquence de la dualité de Poincaré pour variétés non-orientables $H_{m-p}(E; \mathcal{M}) \simeq H^p(E, \partial E; \mathcal{M} \otimes \mathfrak{o}_A)$, $m = \dim E$ (cf. [St]).

Ce résultat assure, pour des fibrations à bord, la validité d'un théorème analogue au théorème 3.3.1 qui décrit la suite spectrale de Leray-Serre en termes de cohomologie de Morse. On devra juste modifier X_ϵ de façon à le rendre, le long du bord, intérieur ou extérieur selon qu'on voudra calculer la cohomologie de l'espace total ou bien la cohomologie relative au bord. Voici des choix de perturbations de X_ϵ le long du bord selon que la base et la fibre ont un bord non vide ou pas.

- a. $\partial B \neq \emptyset$, $\partial F = \emptyset$. On prend f telle que $-\nabla f$ soit rentrant le long du bord ∂B . Il en sera de même pour X_ϵ le long de $\partial E = E|_{\partial B}$. Le complexe associé à X_ϵ est muni d'une filtration naturelle par l'indice des points critiques sur la base et la suite spectrale associée est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre classique et vérifie

$$E_2^{p,q} \simeq H_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)), \quad E_r^{p,q} \Longrightarrow H_{\text{Morse}}^{p+q}(E).$$

Si l'on avait considéré une fonction f telle que $-\nabla f$ pointe vers l'extérieur le long de ∂B on aurait obtenu une suite spectrale vérifiant

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B, \partial B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F)), \quad E_r^{p,q} \Longrightarrow H_{\text{Morse}}^{p+q}(E, \partial E).$$

- b. $\partial B = \emptyset$, $\partial F \neq \emptyset$. Je présente une façon de rendre X_ϵ sortant, de façon à calculer l'homologie relative de l'espace total. Choisissons φ (cf. 3.3.1) telle que $-\nabla \varphi$ soit sortant le long de ∂F . Alors X_ϵ est sortant le long de tout $\partial E \cap \pi^{-1}(U_i)$ et encore faut-il le modifier sur le reste du bord. On choisit à cet effet une fonction $\rho : \mathcal{V}(\partial(E)) \rightarrow]-\delta, 0]$ avec $\delta > 0$ très petit et $\mathcal{V}(\partial E)$ un voisinage tubulaire de E qui ne contient pas de points critiques de f_ϵ , telle que $\rho^{-1}(0) = \partial E$ soit un niveau régulier. Soit $\psi :]-\delta, 0] \rightarrow [0, 1]$ une fonction de troncature qui vérifie $\psi|_{]-\delta, -3\delta/4]} \equiv 0$, $\psi|_{[-\delta/2, 0]} \equiv 1$. Alors

$$X'_\epsilon = X_\epsilon + (\psi \circ \rho) \cdot \nabla \rho$$

est la perturbation recherchée de X_ϵ . C'est un champ de pseudo-gradient négatif pour f_ϵ lorsque $|\nabla \rho|$ est suffisamment petit, il est intérieur le long du bord, il coïncide avec X_ϵ au voisinage des variétés instables et il vérifie la condition de transversalité de Morse-Smale si X_ϵ la vérifie. Pour utilisation ultérieure, énonçons avec précision l'analogue du théorème 3.3.1 pour l'homologie relative au bord.

Théorème 3.4.2 (Suite spectrale de Leray-Serre en cohomologie de Morse pour fibrations à bord). *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ une fibration localement triviale lisse avec B fermée et F compacte avec bord non vide. On suppose que F et E sont orientables. Soit $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction de Morse $f_\epsilon : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|f_\epsilon - \tilde{f}\|_{C^1} \leq \epsilon$ et un champ X_ϵ qui est un pseudo-gradient négatif par rapport à f_ϵ et qui pointe vers l'extérieur le long de ∂E , tels que $\{X_\epsilon = 0\} = \text{Crit}(f_\epsilon)$ et*

$$\pi(\text{Crit}(f_\epsilon)) = \text{Crit}(f).$$

De plus :

- a) *Il existe une suite spectrale $(E_r^{*,*})_{r \geq 1}$ qui converge vers*

$$H_{\text{Morse}}^*(E, X_\epsilon; \mathbb{Z}) \simeq H^*(E, \partial E; \mathbb{Z})$$

et qui vérifie

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= C_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)), \quad d_1 = \delta_{\text{Morse}}, \\ E_2^{p,q} &= H_{\text{Morse}}^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)). \end{aligned}$$

La notation $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)$ désigne un système local de coefficients isomorphe au système local de Leray-Serre 3.2.5 de fibre $H^q(F, \partial F)$. Cette suite spectrale, ainsi que le système de coefficients $\mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F, \partial F)$, sont construits exclusivement en termes de cohomologie de Morse.

b) La suite spectrale $(E_r^{*,*})_{r \geq 2}$ est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre $(LSE_r^{*,*})_{r \geq 2}$ du 3.2.9 par un isomorphisme qui dépend uniquement du choix d'orientations pour les variétés instables de X_ϵ , ainsi que du choix d'orientations sur F et E .

On pourra remarquer le fait que, en faisant la même construction avec X_ϵ dirigé vers l'intérieur le long de ∂E , on aurait obtenu l'énoncé 3.3.1.

- c. $\partial B \neq \emptyset$, $\partial F \neq \emptyset$. Avec cet exemple on sort du cadre lisse, mais on peut donner une description de la suite spectrale de Leray-Serre en termes d'homologie de Morse pour tout lissage de ∂E suffisamment petit en norme C^1 . Il suffira de combiner les deux constructions précédentes. Les détails ne présentent pas d'intérêt pour la suite et nous les omettons.

3.5 Exemples

3.5.1 Formule de Künneth

Pour une fibration triviale $E = B \times F$ à base et fibre compactes (sans bord) la formule de Künneth reçoit une interprétation facile en cohomologie de Morse. Etant données deux fonctions de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ leur somme $f + \varphi$ est une fonction de Morse sur E dont les points critiques sont exactement les couples (x, y) , $x \in \text{Crit}(f)$, $y \in \text{Crit}(\varphi)$. Pour des métriques g_B et g_F qui rendent ∇f et, respectivement, $\nabla \varphi$ de Morse-Smale, le champ $-\nabla f - \nabla \varphi$ est de type Morse-Smale et globalement défini sur $B \times F$. On obtient

$$C_{\text{Morse}}^*(B \times F, -\nabla f - \nabla \varphi) = C_{\text{Morse}}^*(B, -\nabla f) \otimes C_{\text{Morse}}^*(F, -\nabla \varphi)$$

et on en tire directement la suite exacte de Künneth

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_{\text{Morse}}^p(B) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{\text{Morse}}^q(F) \longrightarrow H_{\text{Morse}}^n(B \times F) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{\text{Morse}}^p(B), H_{\text{Morse}}^q(F)) \longrightarrow 0$$

La suite exacte de Künneth peut être obtenue sous la forme plus faible

$$(3.23) \quad E_{\infty}^{p,q} = H_{\text{Morse}}^p(B, H_{\text{Morse}}^q(F)),$$

$$\bigoplus_{p+q=n} E_{\infty}^{p,q} = \text{gr}(H_{\text{Morse}}^n(B \times F))$$

en remarquant que la suite spectrale de Leray-Serre dégénère au rang $r = 2$. La suite spectrale peut être considérée tant sous la forme que nous avons décrite dans la section 3.3 que pour la fonction de Morse $f + \varphi$ décrite ci-dessus. Dans les deux cas on utilisera sur $B \times F$ la métrique produit et on aura

$$\dim \widetilde{\mathcal{M}}((x, y), (x', y')) \geq \dim \widetilde{\mathcal{M}}(x, x')$$

pour tous points critiques $x, x' \in \text{Crit}(f)$, $y, y' \in \text{Crit}(\varphi)$. Cette propriété assure directement la dégénérescence au rang $r = 2$. La fibration étant triviale tous les systèmes de coefficients $\mathcal{H}^q(F)$ le sont et cela montre (3.23).

3.5.2 Suite exacte de Gysin et classe d'Euler d'un fibré en sphères

La suite spectrale de Leray-Serre pour une fibration orientable (E, π, B) de fibre $F = \mathbb{S}^{k-1}$, $k \geq 2$ est équivalente à la suite exacte de Gysin [BT, McC]

$$\dots \longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{\cup e} H^{p+k}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+k}(E) \longrightarrow H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots,$$

avec $e \in H^k(B)$ la classe d'Euler de E . L'orientabilité signifie ici que le système local $\mathcal{H}^{k-1}(F)$ est trivial et cela entraîne la trivialité de tous les systèmes locaux $\mathcal{H}^q(F)$, $q \geq 0$.

En effet, la suite spectrale vérifie $E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(\mathbb{S}^{k-1})$ et donc $E_2^{p,q} = 0$ si $q \neq 0$, $k-1$. La seule différentielle qui peut être non nulle est d_k et fournit la suite exacte

$$(3.24) \quad 0 \longrightarrow E_{k+1}^{p,k-1} \longrightarrow E_k^{p,k-1} \xrightarrow{d_k} E_k^{p+k,0} \longrightarrow E_{k+1}^{p+k,0} \longrightarrow 0,$$

avec

$$E_2^{p,q} \simeq E_3^{p,q} \simeq \dots \simeq E_k^{p,q}, \quad E_{k+1}^{p,q} \simeq \dots \simeq E_\infty^{p,q}.$$

Comme $E_\infty^{p,q} = 0$ si $q \neq 0$, $k-1$ on déduit que la filtration sur $H^{p+k}(E)$ est de la forme

$$H^{p+k}(E) = F^0 H^{p+k}(E) = \dots = F^{p+1} H^{p+k}(E) \supset F^{p+2} H^{p+k}(E) = \dots = F^{p+k} H^{p+k}(E) = E_\infty^{p+k,0},$$

ce qui fournit la suite exacte

$$(3.25) \quad 0 \longrightarrow E_{k+1}^{p+k,0} \longrightarrow H^{p+k}(E) \longrightarrow E_{k+1}^{p,k-1} \longrightarrow 0.$$

Les suites exactes (3.24) et (3.25) peuvent être recollées en faisant apparaître la suite exacte longue de Gysin

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^{p+k-1}(E) & \cdots \cdots \cdots & E_k^{p,k-1} & \xrightarrow{d_k} & E_k^{p+k,0} & \cdots \cdots \cdots & H^{p+k}(E) & \cdots \cdots \cdots & H^{p+1}(B) & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \dots & \longrightarrow & H^{p+k-1}(E) & \cdots \cdots \cdots & H^p(B) & \longrightarrow & H^{p+k}(B) & \cdots \cdots \cdots & H^{p+k}(E) & \cdots \cdots \cdots & H^{p+1}(B) & \longrightarrow & \dots \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \\ & & & E_{k+1}^{p,k-1} & & & E_{k+1}^{p+k,0} & & & & E_{k+1}^{p,k-1} & & \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \\ 0 & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & 0 \end{array}$$

On obtient donc une description de la suite exacte de Gysin en homologie de Morse. Le cup-produit avec e est donné par la différentielle $d_k : E_k^{p,k-1} \rightarrow E_k^{p+k,0}$ et celle-ci est induite par la trace sur $C^{p+k,0}$ de la différentielle de Morse sur E

$$d : C^{p,k-1} \longrightarrow C^{p,k} \oplus C^{p+1,k-1} \oplus \dots \oplus C^{p+k,0}.$$

Si l'on choisit f ayant un seul point critique x_0 d'indice 0 et φ avec exactement deux points critiques y_0 et y_{k-1} d'indices 0 et respectivement $k-1$, la classe d'Euler e est donnée par

$$(3.26) \quad e = \left[\sum_{\text{ind}(x)=k} \sum_{\gamma \in \mathcal{M}(x, x_0)} \# \mathcal{M}_\gamma((x, y_0), (x_0, y_{k-1})) \langle x \rangle \right].$$

Furuta [Ft] donne une description directe de la suite exacte de Gysin pour un fibré en sphères provenant d'un fibré vectoriel. Après avoir choisi la fonction de Morse-Smale f sur la base, l'ingrédient essentiel de sa construction est l'existence d'une section générique s dont le lieu d'annulation - qui est une sous-variété de codimension k dans B - n'intersecte pas les $\widetilde{\mathcal{M}}(x, x')$, $\text{ind}(x) - \text{ind}(x') < k$ et intersecte transversalement les $\widetilde{\mathcal{M}}(x, x')$, $\text{ind}(x) - \text{ind}(x') = k$. Le produit scalaire avec s définit une fonction ϕ qui, dans chaque fibre en dehors de $s^{-1}(0)$, est une fonction de Morse-Smale avec exactement deux points critiques. Si x_0 est l'unique point critique d'indice 0 de f , la classe e est définie dans [Ft] comme

$$e = \left[\sum_{\text{ind}(x)=k} \#(\widetilde{\mathcal{M}}(x, x_0) \cap s^{-1}(0)) \langle x \rangle \right].$$

Ceci correspond exactement à notre définition (3.26) si l'on considère sur E le champ de pseudo-gradient $-\nabla \widetilde{f} - \nabla^{\text{vert}} \phi$ pour $\widetilde{f} + \phi$. En effet, l'intersection avec $s^{-1}(0)$ choisit dans $\widetilde{\mathcal{M}}(x, x_0)$ exactement les trajectoires qui ont un relevé dans $\widetilde{\mathcal{M}}((x, y_0), (x_0, y_{k-1}))$. Le champ de pseudo-gradient ci-dessus peut être déformé dans un champ comme ceux que nous utilisons dans notre construction et la définition (3.26) pour la classe d'Euler coïncide avec celle de Furuta [Ft].

3.5.3 Fonctions de Morse-Bott et fibrations

Comme promis dans l'introduction du chapitre, nous sommes maintenant en mesure de discuter le comportement des fonctions de type Morse-Bott sur une variété compacte et d'expliquer leurs particularités dans le cas des fibrations.

Soit E une variété fermée et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse-Bott. Cela signifie que l'ensemble des points critiques $\text{Crit}(f)$ est constitué de sous-variétés compactes de E et que la hessienne de f est non dégénérée le long du fibré normal à chaque sous-variété critique. L'indice de la hessienne restreinte au fibré normal est appelé *indice de Morse de la sous-variété critique*. Ce type de fonction a été considéré pour la première fois par Bott [Bo] pour généraliser les inégalités de Morse. Par exemple, si E est l'espace total d'une fibration lisse de base B et projection $\pi : E \rightarrow B$, la relevée π^*f de toute fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse-Bott sur E , ayant comme variétés critiques les fibres au-dessus des points critiques de f .

Dans le cas général, désignons par N_i , $1 \leq i \leq s$ les variétés critiques de f , d'indice de Morse n_i respectivement. On peut perturber f dans un voisinage tubulaire de chaque N_i , d'après le modèle des fibrations (section 3.3), par une fonction de Morse $g_i : N_i \rightarrow \mathbb{R}$. Soient ρ_i , $1 \leq i \leq s$ des fonctions de troncature à support localisé au voisinage des N_i . Alors $f_\epsilon = f + \epsilon \sum_i \rho_i g_i$ est une fonction de Morse sur E pour ϵ suffisamment petit. Les points critiques de f_ϵ sont les points critiques des g_i sur N_i et on les note par x_i^j , $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq N_i$. On aura

$$\text{ind}_{f_\epsilon}(x_i^j) = \text{ind}_{g_i}(x_i^j) + n_i.$$

Pour un choix générique de la métrique sur E , la condition de transversalité de Morse-Smale est vérifiée et on pourra considérer le complexe de Morse

$$C^k(f_\epsilon) = \bigoplus_{\text{ind}_{f_\epsilon}(x_i^j)=k} \mathbb{Z}\langle x_i^j \rangle ,$$

muni de la filtration naturelle

$$F_p C^k(f_\epsilon) = \bigoplus_{\substack{\text{ind}_{f_\epsilon}(x_i^j)=k \\ n_i \geq p}} \mathbb{Z}\langle x_i^j \rangle .$$

Pour un choix générique de métrique sur E on peut assurer qu'il n'y a pas de trajectoire de gradient négatif de f reliant N_i à N_j pour $n_i \leq n_j$, $i \neq j$ (cf. [AB]) et cela assure que, pour le champ de pseudo-gradient

$$X_\epsilon = -\nabla f - \epsilon \rho_i \nabla g_i ,$$

la différentielle de Morse préserve la filtration. Cela fournit de façon automatique une suite spectrale

$$E_r^{p,q} \implies H^{p+q}(E) .$$

De la façon habituelle, en posant $C_p = \bigoplus_k F_p C^k$ on obtient $C_p/C_{p+1} = \bigoplus_{n_i=p} \mathbb{Z}\langle x_i^j \rangle$ et

$$\begin{aligned} E_1 &= H\left(\bigoplus_p C_p/C_{p+1}\right) \\ &= \bigoplus_{p \geq 0} \bigoplus_{N_i : n_i=p} H^*(N_i) . \end{aligned}$$

Il faut remarquer le fait que, par définition, le terme $H^*(N_i)$ est compté en degré $* + n_i$. On trouve finalement

$$E_1^{p,q+p} = H^{p+q}(C_p/C_{p+1}) = \bigoplus_{\text{ind}(N_i)=p} H^{p+q}(N_i) .$$

Nous avons donc prouvé la

Proposition 3.5.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une suite spectrale $(E_r^{*,*})_{r \geq 1}$ qui converge vers $H^*(E)$, telle que*

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\text{ind}(N_i)=p} H^{p+q}(N_i) .$$

Voici maintenant deux cas particuliers de ce résultat qui le relient au reste du chapitre.

- Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse qui vérifie la condition de transversalité de Morse-Smale, alors on a $E_1^{p,0} = \bigoplus_{\text{ind}(x_i)=p} \mathbb{Z}\langle x_i \rangle$ et $d_1 = \delta_{\text{Morse}}$. La suite spectrale dégénère au deuxième rang et $E_2^{p,0} = H^p(M)$.
- Si E est l'espace total d'une fibration $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ et $f = \pi^* f_1$, avec $f_1 : B \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse, la discussion de la section 3.3 montre que $E_1^{p,q} = C^p(B, \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F))$, $E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}_{\text{Morse}}^q(F))$ et la suite spectrale obtenue est isomorphe à la suite spectrale de Leray-Serre.

3.6 Appendice: Indice de Conley et homologie de Morse

Nous donnons dans cet appendice une brève introduction à la théorie de l'indice de Conley et nous reprenons une preuve alternative de l'isomorphisme entre cohomologie de Morse et cohomologie singulière d'après D. Salamon, en utilisant la notion de *filtration par paires indicielles* [S2]. Nous démontrons en particulier l'indépendance de l'isomorphisme par rapport au choix de la filtration, un résultat prévisible mais dont la preuve semble ne pas apparaître dans la littérature.

3.6.1 Indice de Conley

Soit F une variété compacte munie d'un champ de vecteurs X . Le flot de X sera noté ϕ_t et on écrira souvent $x \cdot t$ pour désigner le point $\phi_t(x)$. Pour $x \in F$, $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ désignent les ensemble α - et, respectivement, ω -limite :

$$\alpha(x) = \{y \in F : \exists t_k \rightarrow -\infty, x \cdot t_k \rightarrow y\} ,$$

$$\omega(x) = \{y \in F : \exists t_k \rightarrow +\infty, x \cdot t_k \rightarrow y\} .$$

Définition 3.6.1 ([Co]). *Un compact $S \subset F$ invariant par le flot ϕ_t est dit ensemble invariant isolé s'il existe un voisinage compact $N \supset S$ dont S est le sous-ensemble invariant maximal :*

$$S = I(N) = \{x \in N : x \cdot \mathbb{R} \subset N\} .$$

Un tel voisinage N est appelé bloc isolant.

Définition 3.6.2 ([Co]). *Soit $S \subset F$ un ensemble invariant isolé. Une paire compacte (N_1, N_0) est appelée couple indexant si les conditions suivantes sont remplies :*

- a. $\overline{N_1 \setminus N_0}$ est un bloc isolant pour S ;
- b. N_0 est positivement invariant dans N_1 , c'est-à-dire

$$\forall x \in N_0, \quad x \cdot [0, t] \in N_1 \Rightarrow x \cdot t \in N_0 ;$$

- c. N_0 est un ensemble de sortie pour N_1 , c'est-à-dire

$$\forall x \in N_1, \quad x \cdot [0, +\infty[\not\subset N_1 \Rightarrow \exists t \geq 0, x \cdot [0, t] \subset N_1 \text{ et } x \cdot t \in N_0 .$$

Etant donné un ensemble invariant isolé S , il existe un couple indexant - cf. [Co] III.4, [CZ] lemme 3.3 ou [S1] 4.3.

Définition 3.6.3 ([Co]). *Soit $S \subset F$ un compact invariant. Une décomposition de Morse de S est une suite finie M_1, M_2, \dots, M_n de compacts invariants disjoints tels que*

$$\forall x \in S \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq n} M_j, \quad \exists i < j, \quad \alpha(x) \in M_j \text{ ou } \omega(x) \in M_i .$$

Dans [CZ], Prop. 3.2. on peut voir que si S est un ensemble invariant isolé et M_1, \dots, M_n une décomposition de Morse, alors chaque M_j , $1 \leq j \leq n$ est encore un ensemble invariant isolé. Pour $i \leq j$ on note

$$M_{ji} = \{x \in S : \alpha(x) \text{ et } \omega(x) \subset M_i \cup M_{i+1} \cup \dots \cup M_j\}.$$

Alors M_{ji} est un ensemble invariant (isolé, si S l'est) dont M_i, M_{i+1}, \dots, M_j représente une décomposition de Morse.

Exemple. Soit φ une fonction de Morse sur F et X un champ de pseudo-gradient négatif par rapport à φ . Les ensembles

$$(3.27) \quad M_j = \{x \in \text{Crit } \varphi : \text{ind}(x) = j\}, \quad 0 \leq j \leq \dim F$$

forment une décomposition de Morse de l'espace total F .

Définition 3.6.4 ([CZ, S1]). Soit S une ensemble invariant isolé et M_1, \dots, M_n une décomposition de Morse. On appelle filtration de S par couples indexants une suite croissante de compacts

$$N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n$$

telle que (N_j, N_{i-1}) est un couple indexant pour M_{ji} , $1 \leq i \leq j \leq n$.

La définition 3.6.4 est justifiée par un théorème d'existence de telles filtrations pour une décomposition de Morse donnée: [CZ] théorème 3.1 ou [S1] 4.4. De plus, on peut choisir (N_n, N_0) égale à un couple indexant pour S donné. Nous utiliserons plus tard la remarque simple que, si $N_n = F$, tous les N_j qui constituent la filtration sont positivement invariants.

Un des résultats cruciaux dans la théorie de l'indice de Conley est le suivant

Théorème 3.6.5 ([Co] III.5, [CZ] théorème 3.2 ou [S1] 4.10). Soit S un ensemble invariant isolé et (N_1, N_0) un couple indexant. Le type d'homotopie de l'espace pointé N_1/N_0 ne dépend pas du couple indexant choisi. On l'appelle indice de Conley de S et on le note $h(S)$.

Salamon [S1] donne une preuve directe du théorème 3.6.5 en définissant à partir du flot ϕ_t une équivalence d'homotopie entre N_1^α/N_0^α et N_1^β/N_0^β , pour (N_1^α, N_0^α) , (N_1^β, N_0^β) deux couples indexants donnés. Soit $t_{\alpha\beta} \geq 0$ le temps minimal tel que, pour $t \geq t_{\alpha\beta}/3$, on ait

$$x \cdot [-t, t] \subset N_1^\alpha \setminus N_0^\alpha \Rightarrow x \in N_1^\beta \setminus N_0^\beta \quad \text{et} \quad x \cdot [-t, t] \subset N_1^\beta \setminus N_0^\beta \Rightarrow x \in N_1^\alpha \setminus N_0^\alpha.$$

On a évidemment $t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha}$ et $t_{\alpha\alpha} = 0$. On définit alors pour $t \geq t_{\alpha\beta}$ l'application suivante, qui est continue:

$$\phi_t^{\beta\alpha} : N_1^\alpha/N_0^\alpha \longrightarrow N_1^\beta/N_0^\beta.$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x \cdot t, & \text{si } x \cdot [0, 2t/3] \subset N_1^\alpha \setminus N_0^\alpha \text{ et } x \cdot [t/3, t] \subset N_1^\beta \setminus N_0^\beta, \\ *, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\phi_t^{\gamma\beta} \circ \phi_s^{\beta\alpha} = \phi_{t+s}^{\gamma\alpha}$ et $\phi_0^{\alpha\alpha} = \text{Id}$, ce qui assure que $\phi_t^{\alpha\beta}$ est un inverse homotopique de $\phi_t^{\beta\alpha}$.

Toujours dans [S1] 5.3 et 5.4 on peut voir que, étant donné un couple indexant (N_1, N_0) , on peut "épaissir" N_0 à $N'_0 \supset N_0$ de façon à ce que (N_1, N'_0) soit encore un couple indexant

pour l'ensemble invariant isolé en question et que, de plus, N'_0 soit un *rétracte par déformation* d'un de ses voisinages dans N_1 . Cette condition assure que

$$H^q(N_1, N'_0) = \tilde{H}^q(N_1/N'_0) = \tilde{H}^q(N_1/N_0) .$$

En itérant ce résultat on peut modifier une filtration par couples indexants de façon à ce que chaque N_{j-1} soit rétracte par déformation d'un de ses voisinages dans N_j . Désormais nous allons considérer des filtrations avec cette propriété, indiquée par les initiales RD.

Voyons comment s'applique le théorème 3.6.5 dans le cas de la décomposition de Morse (3.27). Considérons d'abord l'ensemble invariant isolé constitué d'un unique point $x \in \text{Crit } \varphi$, $\text{ind}(x) = j$. Dans une carte qui linéarise le flot au point x et dont les coordonnées sont $(y, z) \in \mathbb{R}^{n-j} \times \mathbb{R}^j$, un couple indexant est (Figure 3.2)

$$(3.28) \quad (N_1^x, N_0^x) \stackrel{\text{not.}}{=} (D^{n-j} \times D^j, D^{n-j} \times S^{j-1}) ,$$

avec D^j , D^{n-j} des disques de rayon suffisamment petit. L'indice de Conley sera alors le type d'homotopie d'une sphère pointée de dimension j , vu que $D^{n-j} \times D^j / D^{n-j} \times S^{j-1} \simeq (S^j, *)$. De même, l'indice de Conley de l'ensemble M_j des points critiques d'indice j est le type d'homotopie pointée d'un bouquet de $\#M_j$ sphères de même dimension j . On déduit en particulier pour une filtration par des couples indexants RD que

$$H^q(N_j, N_{j-1}) = \tilde{H}^q(N_j/N_{j-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\#M_j}, & q = j , \\ 0, & \text{sinon} . \end{cases}$$

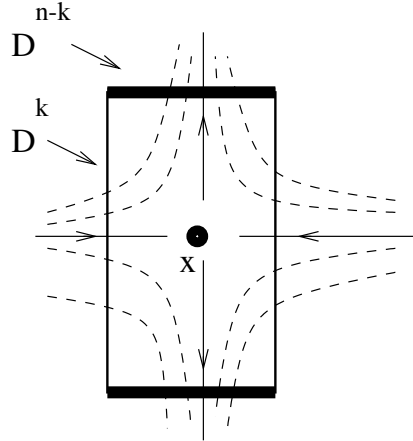


Fig. 3.2: Indice de Conley d'un point critique non dégénéré pour un flot de gradient négatif

3.6.2 Isomorphisme entre homologie de Morse et homologie singulière

Nous rappelons dans ce qui suit l'identification entre cohomologie de Morse et cohomologie singulière d'après Salamon [S2]. Avec les notations de la section précédente on considère $S = F$ et la décomposition de Morse $M_q = \{x \in \text{Crit } \varphi : \text{ind}(x) = q\}$, $0 \leq q \leq \dim F$ avec $M_{qr} = \overline{\mathcal{M}(y, x)}$, $x, y \in \text{Crit } \varphi$, $r \leq \text{ind}(x) \leq \text{ind}(y) \leq q$. Ainsi $M_{n0} = F$ et M_{qq} , $0 \leq q \leq \dim F$ est

l'ensemble des points critiques d'indice q . Considérons une filtration par des couples indexants RD

$$\emptyset = N_{-1} \subset N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n = F, \quad n = \dim F.$$

Par (3.28) un couple indexant pour M_q est

$$(N_1^q, N_0^q) = \bigcup_{x \in \text{Crit}_q \varphi} (N_1^x, N_0^x)$$

et une orientation de $T_x W^u(x)$ choisit un générateur de $H^j(N_1^x, N_0^x) \simeq \mathbb{Z}$. On peut donc identifier le complexe de Morse C^q avec $H^q(N_1^q, N_0^q) \simeq \mathbb{Z}^{\#M_q}$. On a alors le

Lemme 3.6.6 ([S2] 3.2). *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^j(N_1^q, N_0^q) & \xrightarrow{\partial_{\text{Morse}}} & H^{q+1}(N_1^{q+1}, N_0^{q+1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^j(N_q, N_{q-1}) & \xrightarrow{\Delta} & H^{q+1}(N_{q+1}, N_q) \end{array}$$

où Δ est le morphisme de connexion dans la suite exacte longue du triple (N_{q+1}, N_q, N_{q-1}) et les flèches verticales sont induites par les applications $\phi_t^{\beta\alpha}$ décrites plus haut.

La suite exacte longue de la paire (N_q, N_{q-1}) entraîne que le morphisme induit par l'inclusion $H^k(N_q) \rightarrow H^k(N_{q-1})$ est un isomorphisme pour $k \neq q, q-1$ et en conséquence $H^k(N_q) = 0$ si $k > q$ et $H^k(N_q) \xleftarrow{\sim} H^k(F)$ si $k < q$. On a le diagramme commutatif suivant avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccc} & H^{q-1}(N_{q-1}, N_{q-2}) & & & \\ & \downarrow & \searrow \Delta_q & & \\ H^{q-1}(N_{q-1}) & \longrightarrow & H^q(N_q, N_{q-1}) & \longrightarrow & H^q(N_q) \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & & \\ & 0 & & & \end{array}$$

et donc $H^q(N_q, N_{q-1}) \rightarrow H^q(N_q)$ est l'application de conoyau de Δ_q . La fonctorialité du diagramme et l'unicité du conoyau implique alors le fait que les deux diagrammes suivants sont canoniquement isomorphes

$$\begin{array}{ccc} C^{q-1} \xrightarrow{\delta_q} C^q \xrightarrow{\delta_{q+1}} C^{q+1} & & H^{q-1}(N_{q-1}, N_{q-2}) \xrightarrow{\Delta_q} H^q(N_q, N_{q-1}) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H^{q+1}(N_{q+1}, N_q) \\ & \searrow \text{coker } \delta_q & \searrow \\ & \uparrow & \uparrow \\ & H_{\text{Morse}}^q(F) & H^q(N_q) \\ & \uparrow & \uparrow \\ & 0 & H^q(N_{q+1}) \\ & & \uparrow \\ & & 0 \end{array}$$

De là on déduit l'isomorphisme

$$A : H_{\text{Morse}}^q(F) \xrightarrow{\sim} H^q(N_{q+1}) \xrightarrow{\sim} H^q(F),$$

qui dépend uniquement du choix des orientations des variétés instables et du choix de la filtration par couples indexants. Nous démontrons ci-dessous que l'isomorphisme ne dépend en fait pas du choix de la filtration.

Proposition 3.6.7. *L'isomorphisme $A : H_{\text{Morse}}^q(F) \xrightarrow{\sim} H^q(F)$ ne dépend pas du choix de la filtration indicielle sur F , mais uniquement de l'orientation des variétés instables.*

Démonstration. Soient $\mathcal{N} = (\emptyset \subset N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_m = F)$ et $\mathcal{N}' = (\emptyset \subset N'_0 \subset N'_1 \subset \dots \subset N'_m = F)$ deux filtrations par couples indexants sur F . Nous devons démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & H^q(N'_{q+1}) & \xleftarrow{\sim} H^q(F) \\ & \nearrow \sim & \nwarrow \sim \\ H_{\text{Morse}}^q(F) & \xrightarrow{\sim} & H^q(N_{q+1}) \end{array}$$

Ceci sera accompli en le complétant comme

$$(3.29) \quad \begin{array}{ccccccc} & & H^q(N'_{q+1}) & \longleftarrow & H^q(N'_{q+2}) & \longleftarrow \dots & \longleftarrow H^q(F) \\ & \nearrow & \uparrow \sim \phi_{q+1} & & \uparrow \sim \phi_{q+2} & & \parallel \phi_m = \text{id} \\ H_{\text{Morse}}^q(F) & \longrightarrow & H^q(N_{q+1}) & \longleftarrow & H^q(N_{q+2}) & \longleftarrow \dots & \longleftarrow H^q(F) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes induits par l'inclusion et les flèches verticales seront construites explicitement.

Etape 1 : construction de ϕ_{q+1} . Les isomorphismes $C^q(F) \xrightarrow{\sim} H^q(N_q, N_{q-1})$ et $C^q(F) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_q, N'_{q-1})$ fournissent un isomorphisme $H^q(N_q, N_{q-1}) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_q, N'_{q-1})$ compatible avec les différentielles Δ_q et Δ'_q . Puisque $H^q(N_q)$ et $H^q(N_{q+1})$ ont été identifiés avec $\text{coker}(\Delta_q)$ et $\ker(H^q(N_q) \rightarrow H^{q+1}(N_{q+1}, N_q))$ (de même pour N'_q, N'_{q+1}), on déduit des isomorphismes fonctoriels $H^q(N_q) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_q)$ et $\phi_{q+1} : H^q(N_{q+1}) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_{q+1})$. Le dernier rend commutatif le triangle de gauche dans le diagramme (3.29).

Il faut remarquer l'égalité $H^q(N_{q+1}, N_q) = 0$, qui sera utilisée dans la récurrence de l'étape 2.

Etape 2 : supposons que le diagramme (3.29) a été construit jusqu'au rang $k \geq q+1$ et construisons ϕ_{k+1} . En préliminaire, on applique une récurrence sur k pour obtenir $H^i(N_{k+1}, N_q) = 0$, $i \neq q+1, q+2, \dots, k+1$. Ceci découle sans problème de la suite exacte longue associée au triplet (N_{k+1}, N_k, N_q) . L'affirmation analogue reste valable pour la filtration \mathcal{N}' .

Construisons maintenant des isomorphismes $H^i(N_{k+1}, N_q) \xrightarrow{\sim} H^i(N'_{k+1}, N'_q)$ en chaque degré i - les degrés intéressants sont de toute façon ceux compris entre $q+1$ et $k+1$. On utilise les suites exactes longues des triplets (N_{k+1}, N_k, N_q) et (N'_{k+1}, N'_k, N'_q) .

- pour $i \in \{q+1, \dots, k-1\}$, la suite exacte longue associée au triplet de \mathcal{N} contient le morceau

$$0 \longrightarrow H^i(N_{k+1}, N_q) \xrightarrow{\sim} H^i(N_k, N_q) \longrightarrow 0$$

et on a un morceau analogue pour \mathcal{N}' . Par l'hypothèse de récurrence, on a déjà construit des isomorphismes $H^i(N_k, N_q) \xrightarrow{\sim} H^i(N'_k, N'_q)$ pour $i \leq k$. On obtient alors des isomorphismes $H^i(N_{k+1}, N_q) \xrightarrow{\sim} H^i(N'_{k+1}, N'_q)$.

– pour $i \in \{k, k+1\}$, la suite exacte longue associée au triplet de \mathcal{N} contient

$$0 \rightarrow H^k(N_{k+1}, N_q) \rightarrow H^k(N_k, N_q) \xrightarrow{\Delta_k} H^{k+1}(N_{k+1}, N_k) \rightarrow H^{k+1}(N_{k+1}, N_q) \rightarrow 0$$

et, de nouveau, on a un morceau analogue pour \mathcal{N}' . L'hypothèse de récurrence fournit des isomorphismes entre les termes de milieu compatibles avec Δ_k et Δ'_k . On en déduit des isomorphismes fonctoriels entre les termes extrémaux.

Construisons maintenant l'isomorphisme $\phi_{k+1} : H^q(N_{k+1}) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_{k+1})$. On utilise les suites exactes longues des paires (N_{k+1}, N_q) et (N'_{k+1}, N'_q) . La première contient

$$0 \rightarrow H^q(N_{k+1}) \rightarrow H^q(N_q) \rightarrow H^{q+1}(N_{k+1}, N_q) \rightarrow H^{q+1}(N_{k+1}) \rightarrow 0$$

et on a aussi le morceau analogue pour \mathcal{N}' . On a des isomorphismes compatibles avec la différentielle entre les termes de milieu et on obtient des isomorphismes fonctoriels entre les termes extrémaux.

Toutes les flèches construites sont fonctorielles et le diagramme (3.29) va commuter jusqu'au rang $k+1$.

Etape 3 : on prouve que $\phi_m = \text{id}$. Rappelons que le point de départ de toutes les constructions précédentes est le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^q = H^q(N, L) & \xrightarrow{\sim} & H^q(N_q, N_{q-1}) \\ & \searrow \sim & \downarrow \sim \\ & & H^q(N'_q, N'_{q-1}) \end{array}$$

où (N, L) est un couple indexant spécifique pour l'ensemble des points critiques d'indice q . Ces isomorphismes sont induits par les équivalences d'homotopie entre les espaces quotients pointés correspondants qui ont été décrites dans 3.6.1. Les équivalences d'homotopie du type $\phi_t^{\beta\alpha}$ de 3.6.1 induisent, pour $t \geq t_{\alpha\beta}$, le même isomorphisme en cohomologie puisqu'elles forment des familles à un paramètre (qui est précisément t) et sont donc homotopes.

Etant donné un ensemble invariant isolé et deux couples indexants (F, L_1) et (F, L_2) dont la première composante est l'espace total, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a. L_1 et L_2 sont positivement invariants :

$$x \in L_1(L_2) \quad \Rightarrow \quad x \cdot [0, +\infty[\subset L_1(L_2) .$$

Ceci découle de la condition 2 dans la définition 3.6.2 ;

b. si $x \in L_1$, alors $\phi^t(x) \in L_2$ pour t suffisamment grand. En effet, $x \notin S$ et donc $x \cdot \mathbb{R} \not\subset F \setminus L_2$, ce qui revient à dire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x \cdot t_0 \in L_2$. Par invariance positive de L_2 , on déduit que $x \cdot t \in L_2$ pour tout $t \geq t_0$.

Remarque. Par ce qui précède, tous les termes d'une filtration par couples indexants $\emptyset \subset N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_m = F$ sont positivement invariants, puisqu'ils apparaissent comme deuxième terme dans un couple indexant dont le premier terme est F .

Par compacité de L_1 , on peut définir pour deux couples indexants (F, L_1) et (F, L_2) un morphisme de paires $\phi_t^{21}(x) = \phi_t(x)$ pour t suffisamment grand. L'application induite au niveau des espaces quotients $F/L_1 \rightarrow F/L_2$ est une équivalence d'homotopie du type défini dans 3.6.1.

Lorsque $L_1 = N'_q$ et $L_2 = N_q$, cette application induit l'isomorphisme construit plus haut $H^{q+1}(F, N_q) \xrightarrow{\sim} H^{q+1}(F, N'_q)$. En effet, pour t suffisamment grand, ϕ_t envoie N'_k dans N_k et définit un morphisme de paires $(N'_k, N'_q) \rightarrow (N_k, N_q)$, $k \geq 0$ qui induit tour à tour les isomorphismes intermédiaires construits au cours de l'étape 2. De même, ϕ_t induit l'isomorphisme $H^q(N_q, N_{q-1}) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_q, N'_{q-1})$ et donc $H^q(N_q) \xrightarrow{\sim} H^q(N'_q)$.

L'application ϕ_m est uniquement déterminée par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^q(F) & \longrightarrow & H^q(N_q) & \longrightarrow & H^{q+1}(F, N_q) & \longrightarrow & H^{q+1}(F) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi_m & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^q(F) & \longrightarrow & H^q(N'_q) & \longrightarrow & H^{q+1}(F, N'_q) & \longrightarrow & H^{q+1}(F) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Puisque l'application induite par ϕ_t le rend commutatif, on déduit que ϕ_m est induite par ϕ_t pour un certain t suffisamment grand. Mais ϕ_t est homotope à l'identité et on déduit que $\phi_m = \text{id}$.

□

4. LA SUITE SPECTRALE DE LERAY-SERRE EN COHOMOLOGIE DE FLOER

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des groupes de (co)homologie de Floer de variétés symplectiques admissibles munies d'une structure d'espace fibré compatible avec la forme symplectique. Le théorème principal postule l'existence d'une suite spectrale de type Leray-Serre aboutissant à la (co)homologie de Floer de l'espace total, dont le deuxième terme est exprimé de la façon habituelle en fonction des groupes de (co)homologie de Floer de la base et de la fibre.

Nous allons travailler avec des espaces fibrés au-dessus de bases compactes et ayant une fibre ouverte. Il sera néanmoins tout aussi intéressant d'étudier le cas des bases ouvertes avec fibre ouverte ou fermée : les résultats que je présente dans ce chapitre s'insèrent dans un programme plus vaste. Le choix des hypothèses que j'utilise dans ce chapitre est motivé par l'existence d'une riche classe d'exemples (cf. 4.1.4) et par la présence de difficultés représentatives pour l'étude de l'homologie de Floer des espaces fibrés. Le théorème principal de ce chapitre est énoncé dans la section 4.2.1.

Je voudrais avertir d'emblée le lecteur que, dans la démonstration du théorème 4.2.1, il manque un argument. Il s'agit d'une estimation d'énergie pour des trajectoires de Floer, apparentée au lemme 2.4.1 (dont la preuve s'appuie sur le lemme de monotonie de Gromov [G]). Un résultat de la même nature que celui que je recherche a été démontré par K. Cieliebak [Ci], sous le nom de “lemme de monotonie hamiltonienne”. Je n'ai pas réussi à le démontrer dans mon contexte pour l'instant, mais j'indiquerai pourquoi je pense que le résultat est vrai.

Il faut noter que cette estimation d'énergie peut être contournée dans le cas des fibrés en droites à courbure négative. J'indiquerai comment fonctionne la démonstration dans ce dernier cas et quelle est la suite spectrale qu'on obtient. Comme corollaire, on démontre que la cohomologie de Floer d'un tel fibré est nulle, avec des applications immédiates à l'existence d'orbites périodiques sur des hypersurfaces à bord de type contact restreint.

4.1 Contexte, hypothèses, exemples

Cette section est structurée comme suit : je précise dans 4.1.1 et j'explique dans 4.1.2 les hypothèses imposées sur l'espace total. J'en déduis au 4.1.5 les premières conséquences concernant l'asymptotique des champs de Reeb et de Liouville lorsque la taille des fibres tend vers zéro. Je présente en détail dans le paragraphe 4.1.4 l'exemple des fibrés en droites hermitiens à courbure négative. Ceci constitue, pour le moment, la classe principale de variétés symplectiques auxquelles s'appliquent mes résultats. La sous-section 4.1.3 est une “apologie” des hypothèses que j'ai choisi : je les compare avec un cadre où l'accent serait mis sur un espace fibré à bord de type contact.

4.1.1 Fibrations symplectiques

La classe de variétés qu'on a en vue est précisée par la

Définition 4.1.1. *Une fibration symplectique admissible est une variété admissible \widehat{E} munie d'une structure de fibration localement triviale lisse de base B , fibre \widehat{F} et projection $\pi : \widehat{E} \rightarrow B$, ainsi que des objets suivants :*

- une 2-forme fermée $\Omega \in \Omega^2(\widehat{E})$:

$$d\Omega = 0 ,$$
- une primitive Θ de Ω définie hors d'un compact,

tels que toutes les fibres $(\widehat{F}_z, \Omega|_{\widehat{F}_z}, \Theta|_{\widehat{F}_z})$, $z \in B$ soient des variétés admissibles. On a désigné par \widehat{F}_z la fibre $\pi^{-1}(z)$, $z \in B$.

Une fibration symplectique admissible sera notée $(\widehat{E}, B, \widehat{F}, \pi, \Omega, \Theta)$, ou encore $(\widehat{E}, \Omega, \Theta)$.

Les restrictions de Ω et Θ à la fibre \widehat{F}_z , $z \in B$ seront notées Ω_z et Θ_z respectivement. La définition est très flexible: les fibres ne sont pas nécessairement symplectomorphes (mais juste munies de formes symplectiques équivalentes par déformation) et le groupe de structure de \widehat{E} n'est pas nécessairement réductible à $\text{Symp}(\widehat{F}, \sigma)$, avec σ une forme symplectique donnée sur \widehat{F} .

Le problème général que nous voudrions traiter est celui du calcul de la (co)homologie de Floer de l'espace total en termes des (co)homologies de Floer de la base et de la fibre. On entend par "calculer" le fait d'établir l'existence d'une suite spectrale convergeant vers la (co)homologie de l'espace total et dont le deuxième terme s'exprimerait en fonction des (co)homologies de la base et de la fibre. Formulé tel quel, ce but est hors d'atteinte pour la définition générale fixée ci-dessus, tant que la forme symplectique et la forme de Liouville sur l'espace total ne sont pas reliées d'une quelconque façon aux formes symplectiques/de Liouville dans les fibres. Nous établirons l'existence de la suite spectrale pour la classe suivante de variétés :

Définition 4.1.2. *Une fibration symplectique fortement admissible à base compacte (abrégé fibration symplectique forte) est une fibration symplectique admissible $(\widehat{E}, B, \widehat{F}, \pi, \Omega, \Theta)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

- la base B est compacte et munie d'une forme symplectique β ,
- il existe une primitive Λ de $\pi^*\beta$ définie en dehors d'un compact

$$d\Lambda = \pi^*\beta ,$$

- il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $(\widehat{E}, \pi^*\beta + \epsilon\Omega, \Lambda + \epsilon\Theta)$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ est une variété admissible.

Pour motiver les définitions il est utile de rappeler le cadre des fibrations à fibre compacte F dont le groupe de structure peut être réduit à $\text{Symp}(F, \sigma)$: l'existence d'une 2-forme fermée Ω qui coïncide avec la forme symplectique dans chaque fibre assure que le groupe de structure est réductible à $\text{Ham}(F, \sigma)$ dès que la base est simplement connexe [LaMc]. Si, de plus, la base est munie de la forme symplectique β , alors la forme $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$ est automatiquement non dégénérée pour ϵ suffisamment petit, par compacité de la fibre. Dans le cadre non compact il faut néanmoins imposer la non-dégénérescence dès le début.

Notations. On note

$$(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon) = (\pi^*\beta + \epsilon\Omega, \Lambda + \epsilon\Theta) ,$$

et nous allons abréger plus tard par 0^- , ou encore 1^+ les nombres $-\delta$, respectivement $1 + \delta$ avec $\delta > 0$ suffisamment petit.

L'existence de la suite spectrale en homologie de Floer sera établie pour des fibrations symplectiques fortement admissibles à base compacte sous certaines hypothèses techniques (de comportement à l'infini) sur les données Ω , Λ et Θ . Une classe d'exemples est constituée par les fibrés hermitiens en droites à courbure négative.

Pour formuler ces conditions il nous faut d'abord mettre en évidence un objet géométrique qui sera d'une importance fondamentale par la suite, à savoir *la distribution horizontale sur l'espace total \widehat{E} d'une fibration symplectique admissible*. Soit

$$V = \ker \pi_* \subset T\widehat{E}$$

la distribution verticale donnée par les espaces tangents aux fibres. Puisque la forme Ω est non dégénérée sur V , elle détermine une distribution transverse aux fibres

$$H_p = \{X \in T_p\widehat{E} : \Omega(X, Y) = 0, Y \in V_p\}, \quad p \in \widehat{E}$$

qu'on appellera *distribution horizontale*. On écrit encore $H = V^\perp$, l'orthogonal de V par rapport à Ω . Il est immédiat que, pour une fibration symplectique forte, on aura $H = \{X \in T\widehat{E} : \Omega_\epsilon(X, Y) = 0, Y \in V\}$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ i.e. $H = V^{\perp_\epsilon}$, l'orthogonal de V par rapport à Ω_ϵ . On a une décomposition en somme directe

$$T\widehat{E} = V \oplus H,$$

par rapport à laquelle tout vecteur $X \in T\widehat{E}$ s'écrit de manière unique $X = X^V + X^H$, $X^V \in V$, $X^H \in H$.

On note Z le *champ de Liouville dans les fibres* défini par $Z \in V$ et $\iota(Z)\Omega|_V = \Theta|_V$. Par l'hypothèse d'admissibilité des fibres et compacité de la base, il existe une hypersurface $\Sigma \subset \widehat{E}$ transverse aux fibres telle que $\Sigma_z = \Sigma \cap \widehat{F}_z$, $z \in B$ soit une hypersurface de trivialisation pour un voisinage de l'infini dans chaque fibre \widehat{F}_z , $z \in B$ (cf. Définition 1.2.2). En particulier le flot de Z réalise un difféomorphisme de $\Sigma \times [1, \infty[$ sur un voisinage de l'infini dans \widehat{E}

$$(4.1) \quad \Psi : \Sigma \times [1, \infty[\longrightarrow \widehat{E} ,$$

$$(p, S) \longmapsto \varphi_Z^{\ln S}(p) .$$

L'application Ψ est un symplectomorphisme de $(\Sigma \times [1, \infty[, d(S\Theta))$ dans chaque fibre. On fixe désormais une telle hypersurface de trivialisation Σ . On note R_θ le champ de Reeb vertical sur Σ défini par $R_\theta \in T\Sigma_z$ et

$$(4.2) \quad \iota(R_\theta)\Omega|_{\Sigma_z} = 0, \quad \Theta(R_\theta) = 1, \quad z \in B .$$

Nous pouvons désormais énoncer les hypothèses techniques sous lesquelles nous allons travailler. Elles seront discutées dans la section 4.1.2.

- i. $dS|_H$, $\Theta|_H$ et $\Lambda|_H$ sont uniformément bornées sur $\Sigma \times [1, \infty[$, où H est munie d'une métrique induite par π à partir d'une métrique quelconque sur la base ;

- ii. $0 < \inf_{(p,S)} \Lambda_{(p,S)}(R_\theta(p)) \leq \sup_{(p,S)} \Lambda_{(p,S)}(R_\theta(p)) < \infty$.
- iii. On regarde la 2-forme bilinéaire non dégénérée $(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H$ comme un isomorphisme linéaire de H vers son dual H^\vee . On demande que $\|(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H^{-1}\|$ soit uniformément bornée et qu'il existe une structure presque complexe J_B sur la base telle que sa relevée à H notée \tilde{J}_B soit “uniformément tame” sur H par rapport à $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$. Cela signifie que $(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H(\cdot, \tilde{J}_B\cdot)$ est définie positive (mais pas nécessairement symétrique), de norme uniformément minorée sur \hat{E} .
- iv. $\|\nabla\Theta|_V\| = O(\frac{1}{\sqrt{S}})$ par rapport à une métrique conique sur les fibres. La dérivée covariante est considérée ici par rapport à la connexion H .
- v. Λ bornée sur \hat{E} par rapport à une métrique qui induit sur H et V des métriques du type précédent et telle que $H \perp V$ (cette condition englobe le fait que $\Lambda|_H$ est borné, déjà imposé dans (i). Il est pourtant utile d'isoler ce dernier fait en vue de la proposition 4.2.5).
- vi. la distribution horizontale H peut s'écrire comme graphe d'une application linéaire $L : H_0 \rightarrow V$, avec H_0 une distribution horizontale fixée sur un niveau $S = \text{const.}$ On demande que L et $\Theta \circ L$ soient uniformément bornées par rapport à une métrique du type précédent.

4.1.2 Analyse des hypothèses techniques

L'hypothèse (vi) a un contenu géométrique évident : on demande que la distribution horizontale H ne devienne pas asymptotiquement tangente à la distribution verticale V . Ceci doit être lu comme une première condition de normalisation sur la forme Ω . Cette condition sera utilisée dans la proposition 4.2.5 pour “trivialiser” le couple (Ω, Θ) au-dessus de petits ouverts sur la base. C'est toujours dans la démonstration de 4.2.5 que nous utiliserons les hypothèses (iv) et (v).

L'hypothèse (i) et une partie de l'hypothèse (v) (sous la forme $\|\Lambda|_H\|$ bornée) sont nécessaires pour contrôler l'action de certaines orbites périodiques de hamiltoniens dans la proposition 4.2.6. D'ailleurs, le fait que $\|dS|_H\|$ soit bornée rejoint l'hypothèse (vi).

L'hypothèse (ii) doit être lue de la façon suivante. D'un côté, par la proposition 4.1.6, la positivité stricte $\Lambda(R_\theta) > 0$ le long de $\Sigma \times \{S\}$, $S \geq 1$ assure que le champ de Liouville Z_ϵ correspondant à Ω_ϵ pointe vers l'extérieur le long de $\Sigma \times \{S\}$ pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$. D'un autre côté, imposer que l'infimum sur $\Sigma \times [1, \infty[$ soit aussi strictement positif vise à assurer que Z_ϵ ne devient pas asymptotiquement tangent à $\Sigma \times \{S\}$ lorsque S tend vers l'infini. Cela aura une importance cruciale pour la comparaison des fonctions S_ϵ et S : dans la proposition 4.1.5 nous démontrons une équivalence du type $\epsilon S \sim S_\epsilon$.

Discutons la première partie de l'hypothèse (iii). Celle-ci sera utilisée dans la démonstration de l'équivalence $\epsilon S \sim S_\epsilon$. C'est une contrainte raisonnable. Elle équivaut à demander que $\|(\text{Id} + \epsilon JL(x))^{-1}\|$ soit bornée pour tout x et tout ϵ suffisamment petit, lorsque $L(x)$ est une famille continue d'endomorphismes antisymétriques de \mathbb{R}^{2n} et J une structure presque

complexe tels que $\text{Id} + \epsilon JL(x)$ est inversible pour ϵ suffisamment petit. Ceci est toujours vrai si $L(x) = JS(x)$ avec $S(x)$ symétrique (mais ne reste pas toujours vrai dans le cas général. On peut construire des contre-exemples, qui restent néanmoins de facture assez artificielle). Cela donne une idée du caractère peu restrictif de cette condition.

Pour ce qui est de la deuxième partie de l'hypothèse (iii), elle sera utilisée pour travailler dans \widehat{E} avec des structures presque complexes découplées, du type $\widetilde{J}_B \oplus J_V$, où J_B est une structure presque complexe sur la base, \widetilde{J}_B est sa relevée sur H et J_V est une structure presque complexe sur V compatible avec Ω . Les structures de ce type seront "tame" pour $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$. Le fait d'imposer la minoration uniforme de la norme de $(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)(\cdot, \widetilde{J}_B \cdot)$ permettra de choisir une J_B générique en gardant la propriété d'être "tame".

Pour clore cette section je donne, d'après J. Kędra [Ke], une obstruction cohomologique à l'existence d'une primitive de $\pi^*\beta$ définie au voisinage de l'infini dans \widehat{E} . Avec les notations de la proposition 4.1.6, considérons la fibration localement triviale $\partial F \hookrightarrow \partial E \xrightarrow{\pi} B$: l'existence de Λ entraîne que la classe $\pi^*[\beta] \in H^2(\partial E, \mathbb{R})$ est nulle. D'un autre côté, si le système de coefficients cohomologiques de la fibre est trivial (e.g. pour une base simplement connexe), le morphisme π^* se lit sur la suite spectrale de Leray-Serre comme le composé

$$H^p(B) = E_2^{p,0} \longrightarrow E_3^{p,0} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\infty^{p,0} \subset H^p(\partial E) .$$

Pour des raisons de dimension, on a $E_3^{2,0} = E_\infty^{2,0}$ et l'existence de la primitive Λ entraîne que l'image de $[\beta]$ dans $E_3^{2,0}$ est nulle. Cela veut dire qu'il existe $\alpha \in E_2^{0,1} = H^1(\partial F, \mathbb{R})$ tel que $d_2^{0,1}(\alpha) = [\beta]$. En particulier

$$(4.3) \quad H^1(\partial F, \mathbb{R}) \neq 0 .$$

Mes hypothèses ne seront par exemple pas vérifiées pour des fibrés vectoriels négatifs de rang strictement supérieur à 1, alors que leurs fibrés en boules unitaires sont pseudo-convexes et on aimerait bien établir une suite spectrale en cohomologie de Floer dans cette situation. Cela fera l'objet d'une étude ultérieure.

4.1.3 Deux points de vue: variétés admissibles vs. variétés complétées

Il convient de discuter aussi le cadre initial pour lequel j'ai opté, à savoir celui d'une fibration dont l'espace total est une variété admissible, muni d'une 2-forme Ω qui rend les fibres admissibles. Si on a en vue les applications de la suite spectrale à la conjecture de Weinstein dans des espaces fibrés et le contexte habituel des variétés à bord, on voit tout de suite que le problème pouvait être formulé aussi pour un espace fibré à bord de type contact, muni d'une 2-forme par rapport à laquelle les fibres ont aussi un bord de type contact.

Les deux contextes ne sont pas tout à fait équivalents. En fait, celui que nous avons adopté est apparemment plus fort : en tronquant l'espace fibré à l'aide d'une hypersurface de trivialisatation comme dans la proposition 4.1.6, on obtient un espace fibré à bord de type contact, dont les fibres ont aussi un bord de type contact.

Nous avons vu au 1.2.2 que le processus de complétion par le flot de Liouville permet d'associer à toute variété symplectique à bord de type contact M une variété admissible \widehat{M} . Mais ce procédé n'est pas suffisamment riche pour notre situation : étant données les formes β et Ω sur le fibré à bord E , il permet d'étendre canoniquement $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$ à $\partial E \times [1, \infty[$ pour un certain ϵ , mais ne donne pas de méthode canonique pour étendre Ω à elle seule ou, ce qui

revient au même, d'étendre $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$ pour ϵ arbitraire. D'autres problèmes surgissent aussi pour ce qui est de la compatibilité de la trivialisatation avec la projection de la fibration. Ceux-ci amènent à compléter par le flot de Liouville dans les fibres, mais de nouveaux problèmes sont soulevés par l'extension de Ω sur $\partial E \times [1, \infty[$: celle-ci ne sera bien définie que le long des fibres. Il est naturel de se demander si on peut étendre Ω et les primitives Θ et Λ sur $\partial E \times [1, \infty[$ tout entier de façon à ce que les hypothèses (i) à (vi) soient vérifiées, mais je ne connais pas la réponse à cette question.

Par ailleurs, notons qu'un avantage des fibrations ouvertes par rapport aux fibrations à bord est le fait de pouvoir définir le transport parallèle le long de la distribution horizontale sans ambiguïté comme un difféomorphisme (en fait, symplectomorphisme car $d\Omega = 0$) entre deux fibres quelconques. Dans la situation à bord le transport parallèle n'est pas bien défini, car H peut ne pas être tangente au bord (c'est le cas en particulier si H n'est pas intégrable, et c'est précisément en relation avec ce phénomène que l'hypothèse (vi) est imposée).

Faisons une dernière remarque. Le fait de travailler directement avec des variétés non compactes sans bord (admissibles) est en accord avec la philosophie générale de l'homologie de Floer telle qu'inspirée par le théorème d'invariance par isotopie 1.1.7 : plus que des invariants de la variété à bord, les groupes d'homologie de Floer sont plutôt des invariants de la variété complétée qui lui est associée.

4.1.4 Exemples

Exemple 4.1.3. *Fibrés en droites hermitiens à courbure négative.*

Soit B une variété compacte sans bord munie d'une forme symplectique β dont la classe de cohomologie $[\beta] \in H^2(B, \mathbb{R})$ est entière. Soit $\mathcal{L} \rightarrow B$ un fibré en droites complexes tel que

$$c_1(\mathcal{L}) = -[\beta] .$$

Notons que le type topologique de \mathcal{L} est uniquement déterminé par un relèvement entier de $-[\beta]$. Toute connexion linéaire ∇ détermine une 1-forme de transgression $\theta^\nabla \in \Omega^1(\mathcal{L} \setminus 0_{\mathcal{L}}, \mathbb{R})$ définie comme suit (cf. P. Gauduchon [Ga] ou P. Biran [B]) :

$$\begin{cases} \theta_u^\nabla(u) = 0, & \theta_u^\nabla(iu) = 1/2\pi, & u \in \mathcal{L} \setminus 0_{\mathcal{L}} ; \\ \theta^\nabla|_{H^\nabla} \equiv 0, & \text{où } H^\nabla \text{ est la distribution horizontale définissant } \nabla . \end{cases}$$

Soit R^∇ la 2-forme de courbure de ∇ . Alors $\frac{1}{2i\pi}R^\nabla$ est un représentant pour $c_1(\mathcal{L})$ et une propriété importante de la forme de transgression est d'être une primitive pour $-\pi^*(\frac{1}{2i\pi}R^\nabla)$.

Lorsque \mathcal{L} est muni d'une métrique hermitienne h , on peut choisir une connexion hermitienne ∇ dont la 2-forme de courbure est $R^\nabla = -2i\pi\beta$. En effet, pour ∇^1 une connexion hermitienne quelconque $\frac{1}{2i\pi}R^{\nabla^1} \in \Omega^2(B, \mathbb{R})$ représente $c_1(\mathcal{L})$: il existe donc une 1-forme $a \in \Omega^1(B, \mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{2i\pi}R^{\nabla^1} = -\beta + da$, ce qui revient à $-2i\pi\beta = R^{\nabla^1} - i d(2\pi a)$. Il suffit alors de prendre $\nabla = \nabla^1 + i(2\pi a)$. On aura en particulier $d\theta^\nabla = \pi^*\beta$.

L'espace total de la fibration sera $\hat{E} = \mathcal{L}$. Une hypersurface de trivialisatation d'un voisinage de l'infini est, par exemple, $\Sigma = \{u \in \mathcal{L} : |u| = 1\}$. Avec les notations de la proposition 4.1.6 on aura $E = \{u \in \mathcal{L} : |u| \leq 1\}$, le fibré en disques unitaires associé à h . Le transport par parallélisme préserve la norme des vecteurs et la distribution horizontale H^∇ est tangente à $\partial E = \Sigma$, ainsi qu'à toutes les surfaces de niveau $|u| = ct$, pour toute connexion hermitienne ∇ .

Soit $r(u) = |u|$ la coordonnée radiale et munissons les fibres de la forme symplectique $\frac{1}{\pi}d\text{Aire}$. Puisque θ^∇ restreinte à la fibre vaut, à $\frac{1}{2\pi}$ près, la forme angulaire on déduit que

$$\Omega \stackrel{\text{not.}}{=} d(r^2\theta^\nabla) \in \Omega^2(\mathcal{L} \setminus 0_{\mathcal{L}}, \mathbb{R})$$

est égale à $\frac{1}{\pi}d\text{Aire}$ en restriction aux fibres. En particulier, la restriction de Ω aux fibres est symplectique. Par ailleurs Ω s'étend en une forme lisse sur E en posant $\Omega_z(\xi, \cdot) = 0$, $\xi \in T_z 0_E$ et $\Omega_z|_{E_z} = \frac{1}{\pi}d\text{Aire}$, $z \in 0_E$. Ceci découle de ce que $\Omega = dr^2 \wedge \theta^\nabla + r^2\pi^*\beta$, $dr^2 \wedge \theta_u^\nabla(\xi, \cdot) = 0$, $\xi \in H_u^\nabla$ et $dr^2 \wedge \theta_u^\nabla|_{E_{\pi(u)}} = \frac{1}{\pi}d\text{Aire}$, $u \in E \setminus 0_E$. La distribution horizontale associée à Ω est H^∇ . La 1-forme

$$\Theta = r^2\theta^\nabla$$

est une primitive de Ω définie en dehors de la section nulle. Les fibres sont symplectomorphes à \mathbb{C} muni de la forme symplectique $\frac{1}{\pi}d\text{Aire}$ et de la forme de Liouville standard (cf. 1.2.1). Le champ de Liouville dans les fibres est le champ radial $X(u) = \frac{u}{2}$ et le champ de Reeb le long de ∂E est $R_\theta(u) = 2\pi \cdot iu$. Posons

$$\Omega_\epsilon \stackrel{\text{not.}}{=} \pi^*\beta + \epsilon d(r^2\theta^\nabla) = d\theta^\nabla + \epsilon d(r^2\theta^\nabla).$$

Comme $\Omega_\epsilon = (1 + \epsilon r^2)\pi^*\beta + dr^2 \wedge \theta^\nabla$ on déduit que Ω_ϵ est une forme symplectique pour tout $\epsilon > 0$. Par ce qui précède, le choix naturel d'une primitive de $\pi^*\beta$ est

$$\Lambda = \theta^\nabla.$$

Le champ de Reeb et le champ de Liouville pour $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$ sont respectivement $R_\epsilon|_{u \in \partial E} = \frac{1}{1+\epsilon}2\pi iu$ et $X_\epsilon|_{u \in \partial E} = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\frac{u}{2}$. En conclusion, la fibration $(\mathcal{L}, B, \mathbb{C}, \pi, \Omega, \Theta)$ est fortement admissible à base compacte au sens de la définition 4.1.2.

Vérifions maintenant les conditions techniques (i) à (vi). Le flot de Liouville dans les fibres préserve la distribution horizontale et donc $dS|_H \equiv 0$. Par définition on a aussi $\Theta|_H \equiv 0$ et l'hypothèse (i) est vérifiée. Toujours par définition, on a $\Lambda(R_\theta) \equiv 1$ et l'hypothèse (ii) est vérifiée. L'hypothèse (iii) est vérifiée puisque la norme $\|(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H^{-1}\|$ est uniformément bornée par 1, en vue de $\Omega_{(p,S)}|_H = S\pi^*\beta$. Pour ce qui est de l'hypothèse (iv), il suffit de remarquer le fait que Θ est préservée par le transport parallèle et donc $\nabla\Theta|_V \equiv 0$. L'hypothèse (v) est clairement vérifiée par définition de θ^∇ , alors que, pour (vi), il suffit de remarquer à nouveau le fait qu'une homothétie dans les fibres préserve H . L'application linéaire L qui décrit H en fonction de la distribution de référence $H_0 = H|_{\partial E}$ est alors nulle.

Remarque. Si on avait considéré un fibré $\mathcal{L} \rightarrow B$ avec $c_1(\mathcal{L}) = [\beta]$, la même construction aurait fourni un fibré muni d'une forme symplectique $\Omega_\epsilon = -d\theta^\nabla + \epsilon d(r^2\theta^\nabla)$, $0 < \epsilon < 1$ pour laquelle le champ de Liouville aurait été *intérieur* $X_\epsilon = \frac{-1+\epsilon}{\epsilon}\frac{u}{2}$, au sens où son flot trivialise un voisinage de l'infini en temps *négatif*, et non pas positif comme dans la définition des variétés admissibles.

Exemple 4.1.3.a. (variante) Soit $\mathcal{L} \rightarrow B$ un fibré holomorphe en droites au-dessus d'une base kählérienne (B, β) vérifiant $c_1(\mathcal{L}) = [\beta]$. On note \mathcal{L}^* le dual complexe de \mathcal{L} . Pour toute métrique hermitienne h sur \mathcal{L} le fibré unitaire en disques associé à \mathcal{L}^* est une fibration symplectique à bord de type contact.

Exemple 4.1.4. Soit (B, β) variété symplectique fermée et $\mathcal{L} \rightarrow B$ un fibré en droites complexes tel qu'il existe un $\lambda > 0$ avec

$$c_1(\mathcal{L}) = -\lambda[\beta] .$$

Pour toute métrique hermitienne h sur \mathcal{L} le fibré en disques unitaires déterminé par h est une fibration symplectique à bord de type contact au-dessus de B .

En effet, la construction de l'exemple 4.1.3 fournit $\theta^\nabla \in \Omega^1(\mathcal{L} \setminus 0_{\mathcal{L}}, \mathbb{R})$ telle que $d(\frac{1}{\lambda}\theta^\nabla) = \pi^*\beta$. On prendra $\Omega_\epsilon = d(\frac{1}{\lambda}\theta^\nabla) + \epsilon d(r^2\theta^\nabla)$ avec $X_\epsilon(u) = \frac{1/\lambda + \epsilon}{\epsilon} \frac{u}{2}$.

Exemple 4.1.4.a. (variante) Soit $\mathcal{L} \rightarrow B$ un fibré ample au-dessus d'une variété complexe B . Pour toute métrique hermitienne h sur \mathcal{L} à forme de Chern positive, le fibré unitaire en disques associé à \mathcal{L}^* est une fibration symplectique à bord de type contact au-dessus de B , la base étant munie de la forme symplectique β_m induite par un plongement projectif déterminé par $\mathcal{L}^{\otimes m}$, $m \gg 0$.

En effet, on aura $c_1(\mathcal{L}^*) = -\frac{1}{m}[\beta_m]$, $m > 0$.

□

Commentaire. Donnons un point de vue alternatif sur la forme de transgression associée à une métrique hermitienne sur un fibré holomorphe en droites $\mathcal{L} \rightarrow B$ au-dessus d'une variété complexe B . La structure complexe sur B détermine un opérateur

$$\bar{\partial} : \Omega^{0,*}(B) \otimes \mathcal{L} \rightarrow \Omega^{0,*+1}(B) \otimes \mathcal{L} .$$

Une fois que la métrique hermitienne h est fixée on a un moyen canonique de lui associer une connexion hermitienne ∇ en demandant que sa partie de type $(0,1)$, définie comme la composition de la projection $\Omega^1(B) \otimes \mathcal{L} \rightarrow \Omega^{0,1}(B) \otimes \mathcal{L}$ avec $\nabla : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \Omega^1(B) \otimes \mathcal{L}$, soit égale à $\bar{\partial}$. On appelle la connexion ainsi construite *connexion de Chern*. Nous allons donner maintenant une autre description de la forme de transgression θ^∇ .

Définissons l'opérateur $d^c : \Omega^*(\mathcal{L}, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{*+1}(\mathcal{L}, \mathbb{C})$ par

$$d^c = J^*d = i(\partial - \bar{\partial}) ,$$

où J désigne la structure complexe sur \mathcal{L} . Alors $\bar{d}^c = d^c$ et d^c est en fait un opérateur réel

$$d^c : \Omega^*(\mathcal{L}, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{*+1}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$$

qui vérifie de plus

$$dd^c = -2i\partial\bar{\partial} .$$

J'affirme que

$$(4.4) \quad \theta^\nabla = -\frac{1}{4\pi} d^c \log r^2 .$$

En effet, il est facile de voir que $(-d^c \log r^2)_u(u) = 0$, $(-d^c \log r^2)_u(iu) = 2$. D'un autre côté, la restriction de $d^c \log r^2$ à H^∇ est nulle puisque H^∇ est invariante par J pour la connexion de Chern, alors que $d \log r^2$ est nulle sur H^∇ puisque le transport par parallélisme préserve la norme des vecteurs.

Pour utilisation ultérieure, notons que la définition de la plurisousharmonicité (stricte) d'une fonction f sera désormais

$$dd^c f \leq 0 \quad (dd^c f < 0) ,$$

au sens où $dd^c f(\cdot, J\cdot)$ est une forme héritienne (définie) négative. Dans l'exemple 4.1.4.a le bord du fibré en disques considéré est, d'après cette définition, pseudo-convexe: la condition $dd^c(-\log r^2) \geq 0$ signifie exactement que $\log r^2$ est une fonction plurisousharmonique, croissante vers le bord - or ceci est la définition de la pseudo-convexité.

4.1.5 Comportement asymptotique: champ de Reeb, champ de Liouville, coordonnée verticale

Nous revenons dans cette section au cadre général fixé dans 4.1.1 pour expliciter entre autres les champs hamiltoniens, les champs de Reeb et les champs de Liouville par rapport aux formes $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$.

Champ hamiltonien. Soit f une fonction définie sur \widehat{E} . On note $X_{f,\epsilon}$ son *champ hamiltonien* par rapport à Ω_ϵ , défini par

$$\iota_{X_{f,\epsilon}} \Omega_\epsilon = df .$$

On note X_f le *champ hamiltonien de f dans la direction des fibres*, défini par l'identité

$$\iota_{X_f} \Omega|_{F_z} = d(f|_{F_z}), \quad z \in B .$$

Pour tout vecteur vertical Y^V on a $df(Y^V) = \Omega_\epsilon(X_{f,\epsilon}, Y^V) = \epsilon \Omega(X_{f,\epsilon}^V, Y^V)$ et, par conséquent,

$$(4.5) \quad X_{f,\epsilon}^V = \frac{1}{\epsilon} X_f .$$

Pour tout vecteur horizontal Y^H on a

$$df(Y^H) = (\pi^* \beta + \epsilon \Omega)(X_{f,\epsilon}^H, Y^H) .$$

En particulier on trouve $X_{f,\epsilon}^H \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} X_{f,0}^H$, où $X_{f,0}^H$ est défini par

$$(4.6) \quad \iota(X_{f,0}^H) \pi^* \beta|_H = df|_H$$

Nous pouvons être encore plus précis sur l'asymptotique de $X_{f,\epsilon}^H$. Ecrivons $X_{f,\epsilon}^H = X_{f,0}^H + R_{f,\epsilon}^H$ pour obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= (\pi^* \beta + \epsilon \Omega)(X_{f,0}^H + R_{f,\epsilon}^H, Y^H) - \pi^* \beta(X_{f,0}^H, Y^H) \\ &= (\pi^* \beta + \epsilon \Omega)(R_{f,\epsilon}^H, Y^H) + \epsilon \Omega(X_{f,0}^H, Y^H) , \quad \text{ou encore} \\ 0 &= (\pi^* \beta + \epsilon \Omega)\left(\frac{1}{\epsilon} R_{f,\epsilon}^H, Y^H\right) + \Omega(X_{f,0}^H, Y^H) . \end{aligned}$$

On en déduit $\frac{1}{\epsilon} R_{f,\epsilon}^H \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} R_{f,0}^H$ défini par

$$(4.7) \quad \iota(R_{f,0}^H) \pi^* \beta|_H = -\iota(X_{f,0}^H) \Omega|_H .$$

On pourra donc écrire

$$(4.8) \quad X_{f,\epsilon}^H = X_{f,0}^H + \epsilon R_{f,0}^H + o^H(\epsilon) .$$

La notation $o^H(\epsilon)$ désigne un champ horizontal qui est un $o(\epsilon)$.

Champ de Reeb. Soit R_ϵ le champ de Reeb sur Σ par rapport à $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$. Il est défini par

$$\iota(R_\epsilon)\Omega_\epsilon|_{T\Sigma} = 0, \quad \Theta_\epsilon(R_\epsilon) = 1.$$

Le noyau de $\Omega_\epsilon|_\Sigma$ est de dimension 1 et le champ de Reeb est proportionnel au champ hamiltonien $X_{f,\epsilon}$ d'une fonction $f : \mathcal{V}(\Sigma) \rightarrow]-1, 1[$ telle que $f^{-1}(0) = \Sigma$ et $df|_\Sigma \neq 0$. Posons

$$\begin{aligned} R_\epsilon &= -\lambda_\epsilon X_{f,\epsilon} \\ &= \lambda_\epsilon \cdot \frac{-\Theta(X_f)}{\epsilon} R_\theta - \lambda_\epsilon X_{f,0}^H - \epsilon \lambda_\epsilon R_{f,0}^H - \lambda_\epsilon o^H(\epsilon). \end{aligned}$$

En vue de $X_f = \Theta(X_f)R_\theta$ on pourra écrire

$$\begin{aligned} 1 &= (\Lambda + \epsilon\Theta)R_\epsilon \\ &= \lambda_\epsilon \left[-\frac{1}{\epsilon} \Lambda(R_\theta)\Theta(X_f) - [\Lambda(X_{f,0}^H) + \Theta(X_f)] - \epsilon [\Lambda(R_{f,0}^H) + \Theta(X_{f,0}^H)] + o^H(\epsilon) \right]. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\Lambda(R_\theta) > 0$ force $\lambda_\epsilon = O(\epsilon)$ et cela entraîne

$$\frac{\lambda_\epsilon}{\epsilon} \longrightarrow \frac{-1}{\Lambda(R_\theta)\Theta(X_f)}, \quad \epsilon \longrightarrow 0^+.$$

Finalement on trouve

$$(4.9) \quad R_\epsilon = \left(\frac{1}{\Lambda(R_\theta)} + o(1) \right) R_\theta + \frac{\epsilon}{\Lambda(R_\theta)\Theta(X_f)} X_{f,0}^H + o^H(\epsilon).$$

On voit déjà que la condition $\Lambda(R_\theta) \neq 0$, assurée par l'hypothèse (ii), est cruciale pour donner l'asymptotique de R_ϵ .

Champ de Liouville. Soit Z_ϵ le champ de Liouville correspondant au couple $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$, défini par $\iota(Z_\epsilon)\Omega_\epsilon = \Theta_\epsilon$. Un calcul similaire aux précédents montre que $Z_\epsilon = Z_\epsilon^V + Z_\epsilon^H$, avec

$$\begin{aligned} Z_\epsilon^V &= Z + \frac{1}{\epsilon} Z_{-1}^V, & \iota(Z)\Omega|_V &= \Theta|_V, \\ & & \iota(Z_{-1}^V)\Omega|_V &= \Lambda|_V \end{aligned}$$

et $\iota(Z_\epsilon^H)(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H = (\Lambda + \epsilon\Theta)|_H$, ou encore

$$\begin{aligned} Z_\epsilon^H &= Z_0^H + \epsilon Z_1^H + o^H(\epsilon), & \iota(Z_0^H)\pi^*\beta|_H &= \Lambda|_H, \\ & & \iota(Z_1^H)\pi^*\beta|_H &= (\Theta - \iota(Z_0^H)\Omega)|_H. \end{aligned}$$

Coordonnée verticale. La proposition qui suit a comme but de comparer les coordonnées verticales S et S_ϵ issues des champs de Liouville Z et Z_ϵ .

Proposition 4.1.5. Soit $(E, B, F, \pi) = (\overline{\text{int}(\Sigma)}, B, \overline{\text{int}(\Sigma_z)}, \pi)$, avec Σ une hypersurface de triv-
ialisation pour un voisinage de l'infini, commune aux champs de Liouville Z et Z_ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.
On note $\Psi_\epsilon : \Sigma \times [1, \infty[\rightarrow \widehat{E} \setminus \text{int}(E)$ la trivialisatation correspondant à chaque Z_ϵ , donnée par

$$\Psi_\epsilon(p, S_\epsilon) = \varphi_{Z_\epsilon}^{\ln S_\epsilon}(p), \quad p \in \Sigma, \quad S_\epsilon \geq 1.$$

Pour $\bar{x} \in \widehat{E} \setminus E$ on note $S_\epsilon(\bar{x})$ la deuxième composante de $\Psi_\epsilon^{-1}(\bar{x})$. De même, on note $S(\bar{x})$ la
deuxième composante de $\Psi^{-1}(\bar{x})$. Il existe des constantes $m_1, c_1, M_1, C_1 > 0$ indépendantes
de ϵ et \bar{x} telles que, pour tout $\bar{x} \in \widehat{E} \setminus E$ et tout $\epsilon > 0$, on a

$$(4.10) \quad \frac{\epsilon}{M_1} S(\bar{x}) + C_1 \leq S_\epsilon(\bar{x}) \leq \frac{\epsilon}{m_1} S(\bar{x}) + c_1.$$

Démonstration. Pour un vecteur X , la quantité $dS(X)$ désigne la composante de X le long de
 $\frac{\partial}{\partial S}$. On rappelle que S et S_ϵ désignent, respectivement, les coordonnées le long des champs de
Liouville Z et Z_ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.

Par construction de la trivialisatation par le champ de Liouville dans les fibres, on a $Z = S \frac{\partial}{\partial S}$
ou encore

$$dS(Z) = S.$$

La composante sur $\frac{\partial}{\partial S}$ de Z_ϵ est

$$dS(Z_\epsilon) = dS(Z) + \frac{1}{\epsilon} dS(Z_{-1}^V) + dS(Z_\epsilon^H).$$

Comme $\iota(Z_{-1}^V)\Omega|_V = \Lambda|_V$ on aura $dS(Z_{-1}^V) = \Lambda(R_\theta)$ et

$$dS(Z_{-1}^V) \in [m, M],$$

où $m = \inf \Lambda(R_\theta)$ et $M = \sup \Lambda(R_\theta)$. Finalement on utilise $\iota(Z_\epsilon^H)(\pi^* \beta + \epsilon \Omega)|_H = (\Lambda + \epsilon \Theta)|_H$
et les hypothèses techniques (i), (iii), (v) pour obtenir

$$|dS(Z_\epsilon^H)| \leq C,$$

avec $C = \sup \| dS|_H \| \cdot \| (\pi^* \beta + \epsilon \Omega)|_H^{-1} \| \left(\sup \| \Lambda|_H \| + \| \Theta|_H \| \right)$. On déduit que la
composante sur $\frac{\partial}{\partial S}$ dans Z_ϵ vérifie

$$(4.11) \quad dS(Z_\epsilon) \in \left[S + \frac{m}{\epsilon} - C, S + \frac{M}{\epsilon} + C \right].$$

Pour le cas d'un fibré en droites, cette formule est encore plus explicite: $dS(Z_\epsilon) = S + \frac{1}{\epsilon}$.
Pour faciliter la lecture, explicitons S_ϵ dans ce cas particulier. Pour $p \in \Sigma$ et $S \geq 1$ on aura
 $\varphi_{Z_\epsilon}^t(p, S) = (p, (S + \frac{1}{\epsilon})e^t - \frac{1}{\epsilon})$, ou encore $\varphi_{Z_\epsilon}^{\ln S_\epsilon}(p, 1) = (p, (1 + \frac{1}{\epsilon})S_\epsilon - \frac{1}{\epsilon})$. Exprimer S_ϵ en
fonction de S revient à résoudre $(1 + \frac{1}{\epsilon})S_\epsilon - \frac{1}{\epsilon} = S$, ce qui donne

$$S_\epsilon(S) = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} S + \frac{1}{1 + \epsilon}.$$

Dans le cas général on doit intégrer la composante $\frac{\partial}{\partial S}$ de Z_ϵ , qui vérifie (4.11). On obtient
 $S(\varphi_{Z_\epsilon}^{\ln S_\epsilon}(p, 1)) \in [(1 + \frac{m}{\epsilon} - C)S_\epsilon - \frac{m}{\epsilon} + C, (1 + \frac{M}{\epsilon} + C)S_\epsilon - \frac{M}{\epsilon} - C]$, ce qui donne

$$\frac{\epsilon S}{M_1} + C_1 \leq S_\epsilon \leq \frac{\epsilon S}{m_1} + c_1,$$

avec $M_1 = M + \epsilon + \epsilon C$, $C_1 = \frac{M+\epsilon C}{\epsilon+M+\epsilon C}$, $m_1 = m + \epsilon - \epsilon C$, $c_1 = \frac{m-\epsilon C}{\epsilon+m-\epsilon C}$. Ces constantes sont bornées par rapport à ϵ et la proposition est démontrée. \square

Bord de type contact. Finissons cette section avec une proposition dont le rôle est de justifier l'hypothèse technique (ii).

Proposition 4.1.6. *Soit $(E, B, F, \pi) = (\overline{\text{int}(\Sigma)}, B, \overline{\text{int}(\Sigma_z)}, \pi)$, avec Σ une hypersurface de triv-
ialisation pour un voisinage de l'infini dans chaque fibre (cf. (4.1); noter que $\partial E = \Sigma$).*

a) *Une condition nécessaire pour l'existence d'un $\epsilon_0 > 0$ tel que ∂E soit de type contact par rapport à $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$, $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ est*

$$\Lambda(R_\theta) \geq 0 .$$

b) *Supposons $\Lambda(R_\theta) \geq 0$ sur ∂E . Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que la forme Θ_ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ soit une forme de contact sur ∂E . De plus, l'existence, pour chaque composante connexe de ∂E , d'un point p où $\Lambda|_p(R_\theta) > 0$ assure que le champ de Liouville associé à $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$ est extérieur le long de ∂E , c'est-à-dire le bord ∂E est de type contact par rapport à $(\Omega_\epsilon, \Theta_\epsilon)$, $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$.*

Démonstration. a) On travaille dans la fibration à bord (E, B, F, π) , avec $\Sigma = \partial E$. Soit f une fonction définie dans un voisinage de ∂E dans E qui admet ∂E comme niveau de maximum régulier. Un champ Z défini le long de ∂E est extérieur si et seulement si $df(Z) > 0$. En particulier, le champ de Liouville Z_ϵ défini par $\iota(Z_\epsilon)\Omega_\epsilon = \Theta_\epsilon$ est extérieur si et seulement si $df(Z_\epsilon) > 0$. Or $df(Z_\epsilon) = \Omega_\epsilon(X_f, Z_\epsilon) = -\Omega_\epsilon(Z_\epsilon, X_f, \epsilon) = -\Theta_\epsilon(X_f, \epsilon)$. Avec (4.5) et (4.8) l'hypothèse entraîne l'existence d'un $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$0 > (\Lambda + \epsilon\Theta)\left(\frac{1}{\epsilon}X_f + X_0^H + O^H(\epsilon)\right) = \frac{1}{\epsilon}\Lambda(X_f) + \Lambda(X_0^H) + \Theta(X_f) + O(\epsilon), \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 .$$

On doit nécessairement avoir $\Lambda(X_f) \leq 0$, ou encore $\Lambda(R_\theta) \geq 0$ vu que X_f et R_θ sont non nuls, proportionnels et de sens opposé.

b) Posons $\dim B = 2n$ et $\dim F = 2k$. Tenant compte de $\pi^*\beta^l = 0$, $l > n$ on obtient

$$d(\Lambda + \epsilon\Theta)^{n+k-1} \wedge (\Lambda + \epsilon\Theta) = \epsilon^{k-1} \left(C_{n+k-1}^n \pi^* \beta^n \Omega^{k-1} \Lambda + \epsilon (C_{n+k-1}^{n-1} \pi^* \beta^{n-1} \Omega^k \Lambda + C_{n+k-1}^n \pi^* \beta^n \Omega^{k-1} \Theta) + O(\epsilon^2) \right) .$$

Une forme volume canonique sur ∂E est donnée par $\pi^*\beta^n\Omega^{k-1}\Theta$. En un point $p \in \partial E$ où $\Lambda|_p(R_\theta) > 0$ le terme dominant dans l'expression précédente est $\pi^*\beta^n\Omega^{k-1}\Lambda$, du même signe que la forme volume canonique puisque $\Lambda(R_\theta) > 0$, $\Theta(R_\theta) = 1 > 0$. Lorsque $\Lambda|_p(R_\theta) = 0$ le terme dominant est la forme volume même. Cela démontre que $\Lambda + \epsilon\Theta$ est une forme de contact pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, avec $\epsilon_0 > 0$ suffisamment petit.

En particulier, le champ de Liouville Z_ϵ est transverse au bord ∂E pour ϵ suffisamment petit. L'existence d'un point p tel que $\Lambda|_p(R_\theta) > 0$ assure que Z_ϵ est extérieur en p et donc sur toute la composante connexe de ∂E contenant p . \square

4.2 Enoncé du théorème principal ; stratégie de preuve

4.2.1 Enoncé du théorème principal

Notation : On désigne par

$$FH^*(\widehat{E}, [\Omega_\epsilon])$$

les groupes de cohomologie de Floer de \widehat{E} par rapport à un représentant arbitraire de la classe d'isotopie de Ω_ϵ . La définition est cohérente en vue de l'invariance par isotopie de la (co)homologie de Floer.

Modulo une estimation d'énergie que je n'ai pas encore pu démontrer, j'obtiens dans ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 4.2.1. (incomplet) (suite spectrale de type Leray-Serre cohomologique). N.B. : Tous les groupes de cohomologie ci-dessous sont calculés à coefficients dans un corps k fixé.

Soit $(\widehat{E}, B, \widehat{F}, \pi, \Omega, \Theta)$ une fibration symplectique forte au sens de la définition 4.1.2, satisfaisant aux conditions (i) à (vi) de la section 4.1.1. On pose $\dim B = 2n$, $\dim F = 2k$. Pour toute fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ il existe une suite spectrale $(E_r^{p,q}(f))_{r \geq 2}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $E_2^{p,q}(f) = H_{\text{Morse}}^{n+p}(B, f; \mathcal{FH}^q(\widehat{F}))$, où $\mathcal{FH}^q(\widehat{F})$ est un système de coefficients sur B de fibre $FH^q(\widehat{F})$;
- $E_r^{p,q}(f) \implies FH^*(\widehat{E}, [\Omega_\epsilon])$, au sens où il existe un k -espace vectoriel filtré L_f isomorphe à $FH^*(\widehat{E}, [\Omega_\epsilon])$ et tel que $E_\infty^{p,q}(f) = \text{gr} L_f$.
- on a un morphisme de systèmes de coefficients $\chi : \mathcal{FH}^*(\widehat{F}) \rightarrow \mathcal{H}^{k+*}(F, \partial F)$ qui coïncide sur chaque fibre avec le morphisme $c^* : FH^*(\widehat{F}_z) \rightarrow H^{k+*}(F_z, \partial F_z)$, $z \in B$. Ici $\mathcal{H}^*(F, \partial F)$ désigne le système de coefficients de Leray-Serre cohomologique associé à la fibration à bord (E, B, F, π) (cf. 4.1.6).
- on a un morphisme de suites spectrales $\psi_r : E_r^{p,q}(f) \rightarrow {}_{LS}E_r^{n+p,k+q}$, $r \geq 2$ vers la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration à bord (E, B, F, π) , dont la limite $\psi_\infty : E_\infty^{p,q}(f) \rightarrow {}_{LS}E_\infty^{n+p,k+q}$ coïncide avec le morphisme induit par la flèche $c^* : FH^*(\widehat{E}) \rightarrow H^{n+k+*}(E, \partial E)$. On sous-entend que la flèche c^* préserve les filtrations respectives sur $FH^*(\widehat{E})$ et $H^{n+k+*}(E, \partial E)$. De plus, ψ_2 coïncide avec le morphisme induit par le morphisme de systèmes de coefficients χ .

Le théorème 4.2.1 admet une formulation analogue en homologie, valable à coefficients entiers. Formellement, elle s'obtient en inversant les flèches et en échangeant la position des indices entre le bas et le haut. Le fait de pouvoir considérer des coefficients entiers en formalisme homologique est dû, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 2, à l'exactitude du foncteur de limite inductive. Le théorème 4.2.1 est formulé à coefficients dans un corps à cause du défaut d'exactitude du foncteur de limite projective lorsqu'on travaille sur un anneau arbitraire. Sa démonstration s'achève au 4.4.10. Je souligne de nouveau que, pour l'instant, la démonstration est incomplète au sens où il manque l'estimation d'énergie pour trajectoires de Floer conjecturée au 4.4.3.

4.2.2 Stratégie de preuve

La démonstration s'appuie sur la construction d'une famille H_ϵ , $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ de hamiltoniens ayant de bonnes propriétés par rapport à la structure de fibration. Nous allons faire usage des groupes

d'homologie de Floer des H_ϵ calculés respectivement par rapport aux formes symplectiques Ω_ϵ . Ainsi, chaque H_ϵ que nous construisons sera linéaire par rapport au champ de Liouville Z_ϵ hors d'un compact. La famille (H_ϵ) sera “presque cofinale” au sens où, pour tout hamiltonien K asymptotiquement linéaire par rapport à un certain Z_ϵ , il existe un H_ϵ tel que $K \leq H_\epsilon$. Toutefois, les hamiltoniens H_ϵ ne sont pas simultanément asymptotiquement linéaires par rapport à un même champ de Liouville et à une même forme symplectique.

Définition 4.2.2. Une famille H_ϵ , $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ de fonctions définies sur $(\widehat{E}, \Omega_\epsilon)$ est dite faiblement cofinale si les suivantes conditions sont vérifiées :

- a. $H_{\epsilon'} \geq H_\epsilon$, $\epsilon' \leq \epsilon$;
- b. chaque H_ϵ est asymptotiquement linéaire par rapport à la forme Ω_ϵ et au champ de Liouville Z_ϵ ;
- c. $(H_\epsilon)_{\epsilon \in]0, \epsilon_0]}$ est une famille cofinale pour la relation d'ordre usuelle \leq dans la classe $\{K : \mathbb{S}^1 \times \widehat{E} \longrightarrow \mathbb{R} : K|_{\mathbb{S}^1 \times E} < 0, K \text{ asymptotiquement linéaire par rapport à un } Z_\epsilon\}$.

Définition 4.2.3. Soient z_1, \dots, z_m des points fixés sur la base B . On dit qu'une famille faiblement cofinale de hamiltoniens H_ϵ , $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ est normalisée au-dessus des points z_1, \dots, z_m si les orbites 1-périodiques d'action plus grande que 0^- de H_ϵ , $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ par rapport à Ω_ϵ apparaissent dans les fibres \widehat{F}_{z_i} , $1 \leq i \leq m$ et sont transversalement non dégénérées.

Définition 4.2.4. Soient z_1, \dots, z_m des points fixés sur la base B . On dit que le couple (Ω, Θ) est normalisé au-dessus des z_i , $1 \leq i \leq m$ s'il existe des voisinages $V_i \ni z_i$, $1 \leq i \leq m$ tels que $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$ avec les propriétés suivantes :

- la distribution horizontale H est préservée par le flot de Liouville dans les fibres ;
- il existe une hypersurface Σ qui trivialise un voisinage de l'infini dans \widehat{E} telle que la distribution horizontale soit tangente aux niveaux $\Sigma \times \{S\}$, $S \geq S_0$;
- $\Omega|_H = g_i \cdot \pi^* \beta|_H$ dans $\pi^{-1}(V_i)$, $1 \leq i \leq m$, avec g_i des fonctions non négatives.

On pourra noter que, pour les fibrés en droites hermitiens à courbure négative (cf. 4.1.4), les trois propriétés ci-dessus sont valables *globalement* sur l'espace total et non seulement au-dessus de petits voisinages sur la base.

Les deux constructions fondamentales de la démonstration sont résumées dans les deux propositions qui suivent. Les preuves seront données dans la section 4.3.

Proposition 4.2.5. Pour toute famille z_1, \dots, z_m de points sur la base B il existe un couple (Ω', Θ') satisfaisant aux hypothèses (i), (ii), (iii) de la section 4.1.1, normalisé au-dessus des z_i , $1 \leq i \leq m$ avec Ω' isotope à Ω et tel que $(\widehat{E}, \Omega', \Theta')$ est une fibration symplectique forte au sens de la définition 4.1.2.

Proposition 4.2.6. Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse. Supposons que le couple (Ω, Θ) est normalisé au-dessus de $\text{Crit}(f)$ et vérifie les conditions (i), (ii), (iii) de la section 4.1.1. Il existe une famille de hamiltoniens $H_{\epsilon, \lambda}$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, $0 < \lambda \leq \lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\epsilon)$ avec les propriétés suivantes :

- a. $H_{\epsilon, \lambda}$, $0 < \lambda \leq \lambda_{\max}$ est asymptotiquement linéaire par rapport à Z_ϵ . Il existe des constantes $a, b > 0$ (indépendantes de ϵ) telles que

$$k_{a\lambda} \leq H_{\epsilon, \lambda} \leq k_{b\lambda}, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_{\max},$$

où $k_\lambda = k_\lambda(S_\epsilon)$ est la famille usuelle de hamiltoniens linéaires de pente λ hors d'un voisinage de $E = \text{int}(\Sigma)$ (Figure 1.1 (3)).

- b. les orbites 1-périodiques de $H_{\epsilon, \lambda}$ par rapport à Ω_ϵ dont l'action est plus grande que 0^- apparaissent dans les fibres au-dessus de $\text{Crit}(f)$ et sont transversalement non dégénérées.
- c. la famille $H_\epsilon = H_{\epsilon, \lambda_{\max}}$ est faiblement cofinale et normalisée au-dessus de $\text{Crit}(f)$.
- d. la fonction $\lambda_{\max}(\epsilon)$ est décroissante par rapport à ϵ et tend vers $+\infty$ lorsque ϵ tend vers zéro.

Voici, brièvement, le plan de la preuve pour le théorème 4.2.1, une fois la famille $H_{\epsilon, \lambda}$ de la proposition 4.2.6 construite.

Le point de départ de notre argument est le suivant. A cause du fait que la distribution horizontale n'est pas tangente aux niveaux $\Sigma \times \{S\}$, $S \geq 1$ et n'est généralement pas préservée par les flots des champs de Liouville Z_ϵ ou même Z , il n'y a pas de relation a priori entre les caractéristiques sur le bord ∂E de la fibration "tronquée" $(E, B, F, \pi) = (\text{int}(\Sigma), B, \text{int}(\Sigma_z), \pi)$ et les caractéristiques sur les bords des fibres. Ici $z \in B$ désigne un point arbitraire et Σ est une hypersurface de trivialisation pour un voisinage de l'infini dans \hat{E} . Une situation typique serait celle où les caractéristiques sur ∂E s'éloignent arbitrairement loin de la fibre contenant un point initial. La manière directe de procéder pour calculer la (co)homologie de Floer de l'espace total par rapport à la forme symplectique Ω_ϵ pour un $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ fixé serait de trivialiser \hat{E} par le flot du champ de Liouville Z_ϵ et de considérer sur \hat{E} une famille cofinale habituelle (voir Figure 1.1 (3)). Or, à cause du phénomène décrit ci-dessus, cette approche ne peut pas mettre en évidence une quelconque relation entre la (co)homologie de Floer de l'espace total et celle de la fibre.

L'idée est alors de considérer sur \hat{E} une famille cofinale de hamiltoniens admissibles dont les orbites 1-périodiques (d'action positive) ont un bon comportement géométrique, plutôt que dynamique. J'entends par cela que les orbites 1-périodiques d'action positive correspondent à des caractéristiques pour la restriction de Ω au bord de certaines fibres, et non pas à des caractéristiques pour la restriction de Ω_ϵ au bord de l'espace total. Une telle famille calculera la (co)homologie de l'espace total et permettra en même temps, grâce à ses propriétés géométriques, de mettre en évidence sur le complexe de Floer une filtration à la manière du complexe de Morse pour une fibration lisse (cf. chapitre précédent).

L'observation qui fait marcher cette approche est la suivante. Considérons sur $\Sigma \times [1, \infty[$ munie de la forme symplectique Ω_ϵ un hamiltonien de la forme $\epsilon k_\lambda(S)$, avec k_λ convexe, $k_\lambda(1) = 0$ et $k'_\lambda \equiv \lambda$ hors d'un petit voisinage de 1 (cf. Figure 1.1 (3)). Le champ hamiltonien est alors de la forme

$$X_{\epsilon k_\lambda} = -k'_\lambda(S)R_\theta + k'_\lambda(S)(\epsilon X_0^H + O^H(\epsilon^2)).$$

Les orbites périodiques de $X_{\epsilon k_\lambda}$ ne sont pas contenues dans les fibres précisément à cause de la présence du terme perturbatif $\epsilon X_0^H + O^H(\epsilon^2)$. Néanmoins, ce terme peut être dominé si on

rajoute un terme de correction de la forme $\epsilon^\alpha X^H$, avec X^H un champ dont on connaît les orbites périodiques et α un réel positif strictement plus petit que 1 : pour ϵ très petit on aura $\epsilon^\alpha \gg \epsilon$ et les orbites de $\epsilon^\alpha X^H$ “dominent” les orbites de ϵX_0^H . Sous certaines conditions, cette approche permet de confiner les orbites 1-périodiques dans les fibres.

Le rôle de la normalisation du couple (Ω, Θ) devient maintenant clair : le terme perturbatif disparaît au-dessus des voisinages V_i de la proposition 4.2.5. Le terme X^H sera le relevé horizontal du champ hamiltonien d’une fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, ayant comme points critiques les $z_1, \dots, z_m \in B$ de la proposition 4.2.5. De cette façon, les orbites 1-périodiques du hamiltonien $\epsilon^\alpha \pi^* f + \epsilon k_\lambda(S)$ seront contenues dans les fibres critiques de $\pi^* f$ si la pente λ n’est pas trop grande (en pratique, la pente maximale doit être de l’ordre de $\epsilon^{-1+\alpha+\delta}$, avec $\delta > 0$ tel que $\alpha + \delta < 1$).

Encore faut-il rendre ce hamiltonien asymptotiquement linéaire par rapport au champ de Liouville Z_ϵ . Cela est réalisé par une construction “en échelle”, décrite dans la démonstration de la proposition 4.2.6, similaire à celle qui a été réalisée pour démontrer la formule de Künneth. Les orbites 1-périodiques parasites n’interviennent pas dans le calcul des groupes d’homologie de Floer puisque leur action est (très) négative. Le fait de contrôler leur action justifie notamment les hypothèses techniques (i) et (ii) de la section 4.1.1. Je note plus bas par H_ϵ le hamiltonien redressé à l’infini.

Le fait de rendre le hamiltonien $\epsilon^\alpha \pi^* f + \epsilon k_\lambda(S)$ asymptotiquement linéaire par rapport à Z_ϵ n’est nullement un simple artifice technique. La possibilité de faire cette construction renferme en soi le fait que $\epsilon^\alpha \pi^* f + \epsilon k_\lambda(S)$ s’insère dans une famille qui contient des représentants *significatifs d’un point de vue dynamique*. Autrement dit, ceci est l’outil caché qui, via l’existence des morphismes de monotonie en homologie de Floer (1.11), permet de relier l’information géométrique à l’information dynamique sur l’espace total de la fibration.

Comme nous l’avons précisé plus haut, le terme perturbatif $k'_\lambda(S)(\epsilon X_0^H + O^H(\epsilon^2))$ peut être contrôlé tant que la pente maximale λ est de l’ordre de $\epsilon^{-1+\alpha+\delta}$. Pour calculer l’homologie non tronquée de \widehat{E} nous devons permettre des pentes arbitrairement grandes et cela demande de faire tendre ϵ vers zéro. Cela explique l’énoncé 4.2.6 et les passages à la limite que nous utiliserons maintes fois par la suite.

Toute la discussion précédente concerne uniquement les orbites 1-périodiques de certains hamiltoniens i.e. les générateurs du complexe de Floer. Mais il faut aussi contrôler les trajectoires de Floer sur l’espace total. Pour comprendre l’approche que je propose, il faut se rappeler le cadre de la suite spectrale de Leray-Serre en (co)homologie de Morse : un des ingrédients fondamentaux de ma construction était le fait de travailler avec des trajectoires de pseudo-gradient sur l’espace total. Celles-ci se projetaient sur des trajectoires de gradient sur la base et cela assurait que la différentielle de Morse préservait la filtration par les indices des points critiques sur la base.

Je propose une approche similaire dans le cadre symplectique. Au lieu de l’équation de Floer habituelle $\bar{\partial}_J u = JX_{H_\epsilon}$ je vais considérer l’équation

$$\bar{\partial}_J u = \epsilon^\alpha \widetilde{J_B X_f} \oplus J_V X_{H_\epsilon}^V,$$

correspondant au champ de *pseudo-gradient négatif* pour la fonctionnelle d’action

$$\mathcal{X}(x(\cdot)) = -(J\dot{x} - \epsilon^\alpha \widetilde{J_B X_f} \oplus J_V X_{H_\epsilon}^V), \quad x(\cdot) \in C_{\text{contr}}^\infty(\mathbb{S}^1, \widehat{E}).$$

Ci-dessus X_f est le champ hamiltonien de la fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, J_B est une structure presque complexe sur B , J_V est une structure presque complexe sur la distribution verticale V , $X_{H_\epsilon}^V$ est la composante verticale du champ hamiltonien de H_ϵ par rapport à Ω_ϵ et le symbole $\widetilde{}$ désigne le relevé horizontal d'un champ sur la base. Le champ de pseudo-gradient \mathcal{X} coïncide avec $-\nabla A_{H_\epsilon}$ au voisinage des points critiques (en fait, pour tout lacet $x(\cdot)$ contenu dans un $\pi^{-1}(V_i)$). La théorie Fredholm et le théorème de compacité pour l'équation de Floer peuvent être transposés pour le champ de pseudo-gradient et, comme \mathcal{X} peut être raccordé à $-\nabla A_{H_\epsilon}$ par une famille de pseudo-gradients du même type, l'homologie du complexe de Floer associé à \mathcal{X} calcule l'homologie de Floer habituelle du hamiltonien H_ϵ .

Une complication supplémentaire est issue du fait que le hamiltonien $\epsilon^\alpha \pi^* f + \epsilon k_\lambda$ a dû être “redressé” pour le rendre asymptotiquement linéaire. L'équation avec laquelle nous allons réellement travailler sera $u_s = \mathcal{Y}(u)$, où

$$\mathcal{Y}(x(\cdot)) = -(J\dot{x} - Y_\epsilon) ,$$

avec $Y_\epsilon = \epsilon^\alpha \widetilde{J_B X_f} \oplus J_V X_{H_\epsilon}^V$ sur $\Sigma \times [1, 2A]$ et $Y_\epsilon = \nabla H_\epsilon$ sur $\Sigma \times [3A, \infty[$.

La propriété essentielle du champ \mathcal{X} était le fait que les solutions de $u_s = \mathcal{X}(u)$ sur \widehat{E} se projettent sur des solutions de $\bar{\partial}u = \nabla f$ sur B . Lorsqu'on change l'équation de \mathcal{X} à \mathcal{Y} cette propriété est détruite. Cela demande de montrer que les trajectoires de Floer reliant des orbites d'action positive doivent rester à l'intérieur du compact $S \leq 2A$. Ceci implique une estimation d'énergie apparentée au lemme 2.4.1 et au lemme de monotonie hamiltonienne de K. Cieliebak [Ci]. *Comme je l'ai déjà dit dans l'introduction au chapitre, ceci est une étape de la preuve du théorème 4.2.1 que je n'ai pas encore pu mettre au point.* Je donnerai des explications qui plaident en faveur de son existence et j'espère pouvoir la démontrer rigoureusement dans un futur proche.

La fin de la preuve passe par une analyse soignée de la façon dont les différents objets algébriques qui sont impliqués dans la construction passent à la limite quand ϵ tend vers zéro.

Dans le cas des fibrés en droites à courbure négative l'estimation d'énergie dont il est question ci-dessus est inutile : les orbites du hamiltonien $H_\epsilon = \epsilon^\alpha \tilde{f} + \epsilon k_\lambda(S)$ sont contenues dans les fibres critiques de \tilde{f} pour toute valeur de la pente λ , le hamiltonien est asymptotiquement linéaire et le champs de pseudo-gradient \mathcal{X} coïncide avec $-\nabla A_{H_\epsilon}$. Cela fait que la construction en “échelle” présentée ci-dessus n'est plus nécessaire, pas plus que l'estimation d'énergie.

4.3 Formes symplectiques et hamiltoniens normalisés

Je présente dans cette section la démonstration des propositions 4.2.5 et 4.2.6.

4.3.1 Formes symplectiques

La motivation de la proposition 4.2.5 est la suivante. Le champ hamiltonien d'une fonction du type $H_{\epsilon, \lambda} = \epsilon^\alpha \tilde{f} + \epsilon k_\lambda$ par rapport à la forme symplectique Ω_ϵ s'écrit

$$X_{H_{\epsilon, \lambda}, \epsilon} = \left(\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}} + \epsilon k'_\lambda(S) X_0^H + O^H(\epsilon^{1+\alpha}) \right) + \left(-k'_\lambda(S) R_\theta \right) .$$

La composante horizontale X_0^H est non nulle dès que la distribution H n'est pas tangente aux niveaux $\Sigma \times \{S\}$, $S \geq 1$ et cela fait que, en général, les orbites de $X_{H_{\epsilon, \lambda}, \epsilon}$ ne sont pas

contenues dans les fibres. Rappelons que le principe de construction de la suite spectrale en homologie de Morse était de mettre en évidence sur l'espace total une fonction de Morse dont les points critiques apparaissaient "par paquets" dans des fibres convenablement choisies. En vue de ce modèle, nous voudrions que les orbites 1-périodiques d'action positive de $X_{H_{\epsilon, \lambda, \epsilon}}$ soient localisées et correspondent à des caractéristiques (éventuellement reparamétrées) dans les fibres. Cela est réalisable par une déformation du couple (Ω, Θ) au-dessus d'un nombre fini de points fixés sur la base. Nous expliquons maintenant cette construction.

Démonstration de la proposition 4.2.5. Soit $z \in B$. Nous allons montrer comment déformer le couple (Ω, Θ) au-dessus d'un petit voisinage de z .

La première étape consiste à se placer dans une trivialisation convenable. Pour cela, notons que la condition $d\Omega = 0$ entraîne le fait que le transport parallèle par rapport à la connexion horizontale H préserve les restrictions de Ω aux fibres (cf. [McSa] Lemme 6.18 ou [GLSW]). On choisit une boule ouverte $U' \ni z$ centrée en z et on considère la trivialisation $\mathcal{T} : \hat{F}_z \times U' \longrightarrow \hat{E}|_{U'}$ donnée par le transport parallèle radial dans U' . La restriction de la forme $\mathcal{T}^*\Omega$ aux fibres $\hat{F}_z \times \{z'\}$ est alors égale à Ω_z .

Considérons des ouverts relativement compacts $z \in \tilde{V} \subset \tilde{U} \subset U'$ et une fonction lisse $\rho : U' \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\rho \equiv 1$ sur \tilde{V} et $\text{supp}(\rho) \subset \tilde{U}$. On pose

$$\Theta_1 = \rho\Theta_0 + (1 - \rho)\Theta, \quad \Omega_1 = d\Theta_1,$$

avec $\Theta_0 = \text{pr}_1^*\Theta_z$. En notant $\Omega_0 = d\Theta_0$ on peut écrire

$$\Omega_1 = \rho\Omega_0 + (1 - \rho)\Omega + d\rho \wedge (\Theta_0 - \Theta).$$

J'affirme que, lorsque \tilde{U} est suffisamment petit, le couple (Ω_1, Θ_1) vérifie les conditions imposées dans la première section. Nous allons étudier la distribution horizontale de Ω_1 . On note

$$\Omega_\rho = \rho\Omega_0 + (1 - \rho)\Omega$$

et

$$H_\rho = V^{\perp_{\Omega_\rho}}.$$

On voit facilement, en utilisant le fait que Ω et Ω_0 ont les mêmes restrictions aux fibres, que la distribution horizontale H_ρ est donnée par

$$H_\rho = \text{graphe} \{ (1 - \rho)L : H_0 \longrightarrow V \},$$

où $L : H_0 \longrightarrow V$ est telle que $H = \text{graphe} \{ L : H_0 \longrightarrow V \}$. Soit maintenant H_1 la distribution horizontale de

$$\Omega_1 = \Omega_\rho + d\rho \wedge (\Theta_0 - \Theta).$$

Tout vecteur $X \in H_1$ peut être décomposé de manière unique comme

$$X = X_\rho + Y_\rho,$$

où $X_\rho \in H_\rho$ et $Y_\rho = Y_\rho(X_\rho) \in V$ est uniquement déterminé par X_ρ (on peut reformuler cela en disant que H_1 est le graphe de l'application linéaire $Y_\rho : H_\rho \longrightarrow V$). Pour tout $Y \in V$ on a $\Omega_1(X, Y) = 0 = (\Omega_\rho + d\rho \wedge (\Theta_0 - \Theta))(X_\rho + Y_\rho, Y) = \Omega_\rho(Y_\rho, Y) + d\rho(X_\rho) \cdot (\Theta_0 - \Theta)(Y)$. Ainsi, le vecteur Y_ρ est déterminé par les relations $Y_\rho \in V$ et

$$(4.12) \quad \iota(Y_\rho)\Omega|_V = -d\rho(X_\rho) \cdot (\Theta_0 - \Theta)|_V,$$

ou encore

$$Y_\rho = -d\rho(X_\rho) \cdot (\Omega|_V)^{-1}(\Theta_0 - \Theta) .$$

On regarde dans cette dernière formule $\Omega|_V$ comme agissant par produit intérieur de V dans son dual V^\vee . Notons l'inégalité

$$(4.13) \quad \|Y_\rho\|_{\text{Vert}} \leq C \|d\rho\| \cdot \|X_\rho\|_{\text{Horiz}} \cdot \|\Theta_0 - \Theta\|_{\text{Vert}} .$$

Le point crucial est de montrer que la non-dégénérescence de $\pi^*\beta + \epsilon\Omega_1$ est préservée pour ϵ suffisamment petit. C'est justement le rôle des conditions (iv) - (vi). Tout d'abord, la forme $\pi^*\beta + \epsilon\Omega_\rho$ est non dégénérée pour ϵ suffisamment petit. Pour voir cela, calculons la restriction de Ω_ρ à H_ρ . Soient X_1, X_2 deux vecteurs dans H_0 . On a

$$\begin{aligned} & \Omega_\rho(X_1 + (1 - \rho)LX_1, X_2 + (1 - \rho)LX_2) \\ &= (\rho\Omega_0 + (1 - \rho)\Omega)(X_1 + (1 - \rho)LX_1, X_2 + (1 - \rho)LX_2) \\ &= \rho(1 - \rho)^2\Omega_0(LX_1, LX_2) + \rho\Omega_0(X_1, X_2) + (1 - \rho)\Omega(X_1 + LX_1, X_2 + LX_2) \\ & \quad + (1 - \rho)\rho^2\Omega(LX_1, LX_2) \\ &= \rho(1 - \rho)\Omega|_V(LX_1, LX_2) + (1 - \rho)\Omega(X_1 + LX_1, X_2 + LX_2) . \end{aligned}$$

Dans la dernière expression obtenue, c'est sur le terme vertical qu'on doit imposer un contrôle: il pourrait a priori avoir une contribution énorme et détruire la non-dégénérescence de $\pi^*\beta + \epsilon\Omega_\rho$. C'est ici qu'intervient la condition (vi): elle assure que l'application bilinéaire $\Omega|_V(L\cdot, L\cdot)$ est bornée uniformément par rapport à la relevée d'une métrique sur la base. Cela entraîne la non-dégénérescence de $\pi^*\beta + \epsilon\Omega_\rho$ pour ϵ suffisamment petit.

Calculons maintenant la restriction de Ω_1 à H_1 . Soient X_ρ^1, X_ρ^2 deux vecteurs quelconques dans H_ρ . On a :

$$\begin{aligned} & \Omega_1(X_\rho^1 + Y_\rho^1, X_\rho^2 + Y_\rho^2) \\ &= (\Omega_\rho + d\rho \wedge (\Theta_0 - \Theta))(X_\rho^1 + Y_\rho^1, X_\rho^2 + Y_\rho^2) \\ &= \Omega_\rho(X_\rho^1, X_\rho^2) + \Omega|_V(Y_\rho^1, Y_\rho^2) + d\rho \wedge (\Theta_0 - \Theta)(X_\rho^1, X_\rho^2) \\ & \quad + d\rho(X_\rho^1) \cdot (\Theta_0 - \Theta)(Y_\rho^2) - d\rho(X_\rho^2) \cdot (\Theta_0 - \Theta)(Y_\rho^1) . \end{aligned}$$

On a besoin de borner dans la dernière expression tous les termes autres que Ω_ρ . C'est ici qu'on utilise la condition (iv): si $\nabla\Theta|_V$ est borné on déduit que la différence $(\Theta_0 - \Theta)|_V$ est uniformément bornée en la taille de l'ouvert \tilde{U} , alors que $d\rho$ est bornée en l'inverse de la taille de \tilde{U} . Cela impose des bornes uniformes sur tous les termes en question, y compris sur $d\rho \wedge (\Theta_0 - \Theta)$ (pour ce dernier, on utilise aussi le fait que $\Theta|_H$ est bornée par (i)).

Cela assure la non-dégénérescence de $\pi^*\beta + \epsilon\Omega_1$ pour ϵ suffisamment petit. Montrons maintenant que les conditions (i), (ii), (iii) de la section 4.1.1 sont vérifiées. Pour prouver que $dS|_{H_1}$ est borné commençons par remarquer le fait que $dS|_{H_\rho}$ est borné. Nous avons utilisé plus haut le fait que $\nabla\Theta$ est bornée pour déduire que $\|Y_\rho\|$ est borné. Mais l'hypothèse (iv) est plus forte: $\nabla\Theta = O(\frac{1}{\sqrt{S}})$ entraîne que Y_ρ est aussi un $O(\frac{1}{\sqrt{S}})$ i.e. la composante sur $\frac{\partial}{\partial S}$ est bornée (ce dernier est de taille $\frac{1}{\sqrt{S}}$). Cela veut précisément dire que $dS|_{H_1}$ est borné. Le fait que $\Lambda|_{H_1}$ est borné est immédiat par l'hypothèse (v). Pour ce qui est de $\Theta_1|_{H_1}$, on utilise le fait que $\Theta \circ L$ est borné par (vi) (ainsi que l'hypothèse initiale $\Theta|_H$ borné) pour déduire que $\Theta|_{H_\rho}$ est borné, et on applique ensuite le même raisonnement que pour $dS|_{H_1}$ pour conclure: la norme de $\Theta|_V$

est de l'ordre de \sqrt{S} et la norme de Y_ρ est un $O(\frac{1}{\sqrt{S}})$. Cela démontre la validité de (i). En vue du fait que Λ n'a pas été modifiée dans la construction, l'hypothèse (ii) est aussi vérifiée. Pour ce qui est de l'hypothèse (iii), il suffit d'observer que $\|\Omega|_{H_1}\|$ est de l'ordre de $\text{const.} + \|\Omega\|$ et d'utiliser l'hypothèse (iii) initiale sur $(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H^{-1}$.

Le couple (Ω_1, Θ_1) est évidemment isotope au couple (Ω, Θ) en gardant tous les niveaux $\Sigma \times \{S\}$, $S \geq 1$ de type contact. L'invariance par isotopie de l'homologie de Floer assure que les groupes d'homologie calculés par rapport à $\pi^*\beta + \epsilon\Omega_1$ et $\pi^*\beta + \epsilon\Omega$ seront les mêmes, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit. \square

4.3.2 Hamiltoniens

Je suppose désormais que, étant donnés des points z_1, \dots, z_m sur B , la forme Ω est normalisée par la construction précédente au-dessus de voisinages $V_i \ni z_i$, $1 \leq i \leq m$ avec $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$. Cela signifie que la distribution horizontale est tangente à $\Sigma \times \{S\}$, $S \geq 1$ et que $\Omega|_H = 0$ au-dessus de chaque V_i . Je présente la construction d'une famille de hamiltoniens $H_{\epsilon, \lambda}$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, $0 < \lambda \leq \lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\epsilon)$ qui vérifie les conditions de la proposition 4.2.6.

On fixe une fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ dont les points critiques sont $z_1, \dots, z_m \in B$. On prendra

$$f \leq 0$$

et f suffisamment petite en norme C^2 par rapport à une métrique fixée sur la base. Sur le modèle du complexe de Morse, on considère la fonction suivante sur $E = \overline{\text{int}(\Sigma)}$:

$$(4.14) \quad f_\epsilon = \epsilon^\alpha \tilde{f} + \epsilon h, \quad h = \eta \sum_{i=1}^n \tilde{\rho}_i f_i + \rho, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Le $\tilde{}$ indique le relevé à E d'une fonction sur la base, les ρ_i sont des fonctions de troncature à support dans les V_i et valant 1 au voisinage des z_i , les f_i sont les transportées sur $\pi^{-1}(V_i)$ d'une fonction de Morse sur la fibre générique qui est croissante vers le bord $\partial F = \Sigma_{z_i}$. Le paramètre $\eta > 0$ est choisi suffisamment petit et ρ est une fonction à support dans un voisinage du bord ∂E , choisie de façon à ce que h soit croissante vers le bord $\partial E = \Sigma$ et admette celui-ci comme niveau régulier. On demande aussi que h soit strictement négative sur ∂E et qu'elle dépende uniquement de S au voisinage de ∂E , avec une dérivée suffisamment petite (positive) par rapport à S . En particulier on aura aussi

$$f_\epsilon < 0.$$

Il faut noter que le hamiltonien f_ϵ peut aussi s'écrire $f_\epsilon = \epsilon^\alpha (\tilde{f} + \epsilon^{1-\alpha} h)$: il faut le voir comme un petit multiple du hamiltonien $\tilde{f} + \epsilon^{1-\alpha} h$. Cette dernière fonction a exactement la forme utilisée dans la description de la suite spectrale de Leray-Serre en homologie de Morse. En particulier, c'est une fonction de Morse lorsque ϵ est suffisamment petit.

Les hamiltoniens $H_{\epsilon, \lambda}$ que nous allons construire valent f_ϵ sur $E = \overline{\text{int}(\Sigma)}$. Ils sont définis comme suit, les paramètres A, A', B, B' et λ_{\max} devant être choisis convenablement plus bas.

I. sur $\Sigma \times [1, A]$ on pose

$$H_{\epsilon, \lambda} = \epsilon^\alpha \tilde{f} + \epsilon H_\lambda^A, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_{\max}.$$

Le hamiltonien $H_\lambda^A = H_\lambda^A(S)$ a été défini au chapitre concernant la formule de Künneth : sa dérivée croît très vite au voisinage de 1 jusqu'à être égale à λ , ensuite elle reste constante égale à λ jusqu'au voisinage de A où elle décroît très vite jusqu'à zéro (Figure 2.2). On désigne par $C(\lambda)$ la valeur maximale atteinte par H_λ^A et on aura

$$C(\lambda) \sim \lambda(A - 1) .$$

II. sur $\Sigma \times [A, A']$: $H_{\epsilon, \lambda} = \epsilon^\alpha \tilde{f} + \epsilon C(\lambda)$.

III. sur $\Sigma \times [A', B]$ on pose

$$H_{\epsilon, \lambda} = \rho(S) \epsilon^\alpha \tilde{f} + \epsilon C(\lambda) .$$

Ici $\rho(S)$ désigne une fonction décroissante qui vaut 1 au voisinage de A' et 0 au voisinage de B , dont la dérivée est majorée (en module) par $\frac{2}{B-A'}$.

IV. sur $\Sigma \times [B, B']$: $H_{\epsilon, \lambda} = \epsilon C(\lambda)$.

V. sur $\Sigma \times [B', \infty[$ on pose

$$H_{\epsilon, \lambda} = \epsilon C(\lambda) + k_\lambda(S_\epsilon) .$$

Démonstration de la proposition 4.2.6.

(a) L'asymptoticité linéaire de $H_{\epsilon, \lambda}$ par rapport au champ de Liouville Z_ϵ est vérifiée par construction. Pour démontrer l'existence des constantes a, b indépendantes de ϵ telles que

$$k_{a\lambda} \leq H_{\epsilon, \lambda} \leq k_{b\lambda}, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_{\max}$$

il suffit de montrer

$$(4.15) \quad a\lambda(S_\epsilon - 1) \leq \bar{H}_{\epsilon, \lambda} \leq b\lambda(S_\epsilon - 1), \quad \lambda > 0 ,$$

où $\bar{H}_{\epsilon, \lambda}$ est construit à partir de $H_{\epsilon, \lambda}$ en ignorant \tilde{f} et les lissages, à savoir :

- $\bar{H}_{\epsilon, \lambda} = 0$ sur E ;
- $\bar{H}_{\epsilon, \lambda} = \epsilon\lambda(S - 1)$ sur $\Sigma \times [1, A]$;
- $\bar{H}_{\epsilon, \lambda} = \epsilon\bar{C}(\lambda)$ sur $\Sigma \times [A, B']$, avec $\bar{C}(\lambda) = \lambda(A - 1)$;
- $\bar{H}_{\epsilon, \lambda} = \epsilon\bar{C}(\lambda) + \lambda(S_\epsilon - \tilde{B})$, où \tilde{B} est un niveau de S_ϵ qui intersecte $\Sigma \times \{B'\}$ - et le choix des constantes a et b conviendra indépendamment du point d'intersection choisi et indépendamment de λ .

Pour résumer les considérations qui vont suivre, on pourrait dire que tout découle de l'inégalité fondamentale (4.10) :

$$\boxed{\frac{\epsilon S}{M_1} + C_1 \leq S_\epsilon \leq \frac{\epsilon S}{m_1} + c_1} .$$

Cela entraîne $\frac{m_1(S_\epsilon - c_1)}{\epsilon} \leq S \leq \frac{M_1(S_\epsilon - C_1)}{\epsilon}$, ou encore

$$m_1 \lambda(S_\epsilon - c_1) - \epsilon \lambda \leq \epsilon \lambda(S - 1) \leq M_1 \lambda(S_\epsilon - C_1) - \epsilon \lambda.$$

On aura ainsi

$$\frac{m_1}{2} \lambda(S_\epsilon - 1) \leq \bar{H}_{\epsilon, \lambda} \leq 2M_1 \lambda(S_\epsilon - 1)$$

pour $S \in [1, A]$. Par la suite nous choisirons B' tel que $B' \leq 6M_1 A$. Cela fait qu'une estimée du même type sera valable pour $S \in [1, B']$ et on aura

$$a \lambda(S_\epsilon - 1) \leq \bar{H}_{\epsilon, \lambda} \leq b \lambda(S_\epsilon - 1),$$

avec $a = \min\{\frac{m_1}{12M_1}, 1\}$, $b = \max\{6M_1^2, 1\}$. Cela démontre l'affirmation (a).

(b) Soit $\delta > 0$ tel que $1 - \alpha - \delta > 0$. On peut supposer sans perte de généralité que le spectre de chaque fibre Σ_z , $z \in \text{Crit}(f)$ est discret et injectif. On choisit alors

$$\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^{1-\alpha-\delta}},$$

avec $\lambda_{\max}(\epsilon) \notin \text{Spec}(\Sigma_z)$, $z \in \text{Crit}(f)$. Désormais la pente λ sera entendue comme variant entre 0 et $\lambda_{\max}(\epsilon)$. On note $\eta_\lambda > 0$ la distance de λ_{\max} à la plus proche valeur appartenant à l'un des spectres de Σ_z , $z \in \text{Crit}(f)$. Nous allons choisir les paramètres A, A', B, B' convenablement pour que les orbites 1-périodiques d'action positive soient entièrement contenues dans les fibres critiques de \tilde{f} . Les choix suivants conviendront :

$$A = \frac{2M\lambda}{\epsilon \cdot \eta_\lambda}, \quad A' = 3A, \quad B = 2A', \quad B' = M_1 B,$$

avec $M = \sup_{\nu(\Sigma)} \Lambda(R_\theta)$ et M_1 donné dans (4.10).

Examinons d'abord la situation sur les zones (I) et (II). Pour la commodité de la lecture, nous écrivons $h(S)$ au lieu de $H_\lambda^A(S)$. Le champ hamiltonien est

$$X_{H_{\epsilon, \lambda, \epsilon}} = \left(\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}} + \epsilon h'(S) X_0^H + O^H(\epsilon^{1+\alpha}) \right) + \left(-h'(S) R_\theta \right).$$

Les deux termes entre grandes parenthèses correspondent à la composante horizontale et verticale, respectivement. Noter que, au-dessus des ouverts V_i au dessus desquels le couple (Ω, Θ) est normalisé, la composante horizontale est simplement $\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}}$. J'affirme que les orbites de période plus petite que 1 du champ hamiltonien $X_{H_{\epsilon, \lambda, \epsilon}}$ apparaissent dans les fibres \hat{F}_z , $z \in \text{Crit}(f)$.

Le point crucial ici est que, lorsque ϵ est suffisamment petit, *le terme dominant dans la composante horizontale* de $X_{H_{\epsilon, \lambda, \epsilon}}$ est le relevé du champ hamiltonien de la fonction $\epsilon^\alpha f$ sur la base. Or la fonction f a été choisie suffisamment petite en norme C^2 pour que ses orbites de période plus petite que 1^+ soient constantes (données par ses points critiques) et cela entraîne que les orbites 1-périodiques de $H_{\epsilon, \lambda}$ dans les zones (I) et (II) sont contenues dans les fibres critiques de \tilde{f} .

Montrons que le terme dominant est effectivement $\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}}$. Notons V_i les voisinages des points critiques de f au-dessus desquels le couple (Ω, Θ) est normalisé. On distingue deux régions intéressantes dans $\Sigma \times [1, A']$:

i. la région $\bigcup_i \pi^{-1}(V_i)$. Ici la composante horizontale du champ hamiltonien est $\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}}$.

Les seules orbites périodiques contenues dans cette région sont celles entièrement contenues dans une fibre critique.

ii. la région ${}^c\left(\bigcup_i \pi^{-1}(V_i)\right)$. Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que, pour tout $x \in {}^c\left(\bigcup_i \pi^{-1}(V_i)\right)$ on a

$$\|X_{f, \text{base}}(x)\| \geq \gamma > 0.$$

D'un autre côté, $dS|_H$ est bornée et on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|X_0^H\| \leq C.$$

En conséquence, tenant compte du fait que $h'(S) \leq 1/\epsilon^{1-\alpha-\delta}$, on obtient pour ϵ suffisamment petit

$$\frac{\|\epsilon h'(S)X_0^H + O^H(\epsilon^{1+\alpha})\|}{\|\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}}\|} \leq \epsilon^\delta \frac{C'}{\gamma} \ll 1.$$

Cela montre que, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le terme dominant dans $X_{H_{\epsilon, \lambda}}^H$ est le champ $\epsilon^\alpha \widetilde{X_{f, \text{base}}}$. Par conséquent, les orbites 1-périodiques de $H_{\epsilon, \lambda}$ dans les zones (I) et (II) sont entièrement contenues dans les fibres au-dessus des points critiques de f .

Le choix des paramètres A et A' fait que les orbites 1-périodiques d'action positive sont localisées au voisinage de $S = 1$. On a vu que, dans la zone (I), les orbites 1-périodiques sont localisées au voisinage de 1 et de A . L'action des orbites situées au voisinage de 1 vaut environ $h'(S)(\int_0^1 \Lambda(R_\theta) + \epsilon)$, elle est positive et comprise dans l'intervalle $[T_0(m + \epsilon), \lambda(M + \epsilon)]$, avec $m = \inf \Lambda(R_\theta)$, $M = \sup \Lambda(R_\theta)$, l'infimum et le supremum étant pris au voisinage de $S = 1$. L'action des orbites situées au voisinage de A vaut environ $h'(S)(\int_0^1 (\Lambda(R_\theta) + \epsilon A) - \epsilon \lambda(A - 1))$. Sa valeur maximale est

$$\begin{aligned} (\lambda - \eta_\lambda)(M + \epsilon A) - \epsilon(A - 1)\lambda &= (\lambda - \eta_\lambda)M - \epsilon A \eta_\lambda + \epsilon \lambda \\ &\leq M\lambda - \epsilon A \eta_\lambda + \epsilon^{\alpha+\gamma}. \end{aligned}$$

On voit que le choix $A = \frac{2M\lambda}{\epsilon \eta_\lambda}$ assure que l'action de ces orbites tend vers $-\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Les orbites 1-périodiques situées dans la zone (II) sont les constantes dans les fibres critiques de \tilde{f} . Elles ont une action environ égale à $-\epsilon \lambda(A - 1)$ qui tend vers $-\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Le choix de A' égal à $3A$ ne joue pas de rôle essentiel : ce qui importe, c'est d'avoir $A' = O(A)$.

Examinons maintenant la situation dans la zone (III). Le champ hamiltonien est

$$X_{H_{\epsilon, \lambda, \epsilon}} = \epsilon^\alpha \left(\rho(S) \widetilde{X_{f, \text{base}}} + \tilde{f} \rho'(S) X_0^H + O^H(\epsilon) \right) + \tilde{f} \epsilon^\alpha \left(-\frac{\rho'(S)}{\epsilon} R_\theta \right).$$

A cause du terme $\rho(S)$ qui devient, au voisinage de B , très petit et qui apparaît en facteur devant $\widetilde{X_{f, \text{base}}}$, on ne peut plus appliquer directement l'argument précédent pour localiser d'emblée les orbites 1-périodiques dans les fibres critiques. Mais nous allons montrer que les éventuelles orbites 1-périodiques qui apparaissent dans cette zone ont une action suffisamment négative.

En effet, la contribution d'aire donnée par le terme vertical est plus petite que

$$(4.16) \quad \frac{1}{\epsilon^{1-\alpha}} \|\tilde{f}\|_{C^0} \frac{M}{B-A'} + 2\epsilon^\alpha \|\tilde{f}\|_{C^0} .$$

On utilise le fait (déjà vu dans le chapitre concernant la formule de Künneth) que $|\rho'(S)S| \leq 2$ dès que $B \geq 2A'$. D'un autre côté, la contribution d'aire donnée par le terme horizontal est plus petite que

$$(4.17) \quad \epsilon^\alpha C \|f\|_{C^1} ,$$

où C est une constante qui prend en compte les bornes sur les restrictions de Λ et Θ à la distribution horizontale. Dans les deux quantités (4.16) et (4.17) c'est le terme en $1/\epsilon^{1-\alpha}$ qui est dominant. Le terme négatif intervenant dans l'action est $-\epsilon\lambda(A-1)$. Pour $\lambda = \lambda_{\max}$ il est de l'ordre de $1/\epsilon^{1-\alpha-\delta}$ et donc plus petit que le terme dominant ! La situation est toutefois rémédée grâce à la présence du facteur $1/(B-A')$ dans ce dernier : tout choix de B tel que

$$(4.18) \quad B - A' = \frac{1}{\epsilon^{2\delta}}$$

assure que le terme dominant est de l'ordre de $1/\epsilon^{1-\alpha-2\delta}$ i.e. beaucoup plus petit que $1/\epsilon^{1-\alpha-\delta}$ pour ϵ est suffisamment petit. La condition (4.18) est automatiquement satisfaite si on prend, comme annoncé, $B = 2A'$: en effet, A est beaucoup plus grand que $\frac{1}{\epsilon}$, alors que

$$\frac{1}{\epsilon^{2\delta}} \ll \frac{1}{\epsilon}$$

pour ϵ est suffisamment petit et $\delta < \frac{1}{2}$.

Traiter l'action des orbites dans les zones (IV) et (V) est beaucoup plus simple. Dans la zone (IV), elle est évidemment négative. Pour assurer que dans la bande $B \leq S \leq B'$ on trouve au moins un niveau complet $S_\epsilon = \text{ct}$, on choisira par exemple

$$(4.19) \quad B' = M_1 B .$$

Dans la zone (V) l'action est de nouveau négative et son calcul ne pose aucun problème en vue du fait que $H_{\lambda,\epsilon}$ dépend maintenant de S_ϵ . Noter que sa croissance était jusque-là du *même ordre de grandeur* que celle d'un hamiltonien linéaire dépendant de S_ϵ .

La non-dégénérescence transverse des orbites 1-périodiques est assurée par le fait que f est une fonction de Morse et $(H_\lambda^A)'' > 0$ aux niveaux S sur lesquels apparaissent celles-ci (nous avons choisi $\lambda \notin \text{Spectre}(\Sigma_z)$). Le point b) est donc démontré.

Les points c) et d) sont évidents par construction et la proposition 4.2.6 est démontrée. \square

4.4 Réduction du théorème principal à une estimation d'énergie

4.4.1 Equation de Floer modifiée et estimations d'énergie

Je précise dans ce qui suit l'équation de Floer avec laquelle je travaille, je démontre qu'elle correspond à un champ de pseudo-gradient négatif et je mets en évidence l'estimation d'énergie qui manque pour avoir une démonstration complète du théorème 4.2.1.

Equation de Floer. Considérons un hamiltonien $H_{\epsilon, \lambda} : \widehat{E} \rightarrow \mathbb{R}$ donné par la proposition 4.2.6. Le champ hamiltonien de $H_{\epsilon, \lambda}$ par rapport à Ω_ϵ est

$$(4.20) \quad X_{H_{\epsilon, \lambda}, \epsilon} = \begin{cases} (\epsilon^\alpha \widetilde{X}_f + \epsilon X_0^H + O^H(\epsilon^{1+\alpha})) + (-h'(S)R_\theta), & \text{pour } 1 \leq S \leq 3A, \\ \epsilon^\alpha (\rho(S) \widetilde{X}_f + \widetilde{f} \rho'(S) X_0^H + O^H(\epsilon)) + \widetilde{f} \epsilon^\alpha (-\frac{\rho'(S)}{\epsilon} R_\theta), & \text{pour } 3A \leq S \leq 6A, \\ 0, & \text{pour } S \geq 6A, \\ -h'_\lambda(S_\epsilon) R_\theta, & \text{pour } S_\epsilon \geq B' \simeq 6M_1 A. \end{cases}$$

Soient J_V une structure presque complexe standard (cf. 1.2.1) sur V compatible avec $\Omega|_V$, J_B une structure presque complexe compatible avec β sur B et désignons par \widetilde{J}_B la relevée de cette dernière à H via π . On note par $J_{\text{std}, \epsilon}$ une structure presque complexe standard *par rapport à la trivialisation de $\Sigma \times [1, \infty[$ par le champ de Liouville Z_ϵ* . Nous allons considérer sur $\Sigma \times [1, \infty[$ des structures presque complexes de la forme suivante.

$$(4.21) \quad J = \begin{cases} \widetilde{J}_B \oplus J_V, & \text{pour } S \leq 6A, \\ J_{\text{std}, \epsilon}, & \text{pour } S_\epsilon \gtrsim 6A/\epsilon. \end{cases}$$

Il faut noter le fait que, sur la distribution horizontale, une telle structure presque complexe n'est pas nécessairement compatible avec $\pi^* \beta + \epsilon \Omega$, tout en étant “tame” pour ϵ suffisamment petit (cela veut dire que $(\pi^* \beta + \epsilon \Omega)(\cdot, J\cdot)$ est une forme définie positive, quoique pas nécessairement symétrique). La manière habituelle d'en déduire un produit scalaire est de considérer $\frac{1}{2}((\pi^* \beta + \epsilon \Omega)(\cdot, J\cdot) + (\pi^* \beta + \epsilon \Omega)(J\cdot, \cdot))$.

On suppose désormais qu'on travaille à coefficients dans un corps \mathbb{K} fixé. L'analyse des orbites périodiques des hamiltoniens $H_\epsilon = H_{\epsilon, \lambda_{\max}(\epsilon)}$ montre que, pour une valeur fixée μ de l'action, le complexe tronqué $FC_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon)$ est naturellement muni d'une filtration

$$(4.22) \quad F_p C_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) = \bigoplus_{\substack{x \in \mathcal{P}(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) \\ i_{CZ}(\pi(x)) \geq p \\ A_{H_\epsilon}(x) \in [0^-, \mu]}} \mathbb{K}\langle x \rangle \subseteq FC_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon).$$

Le formalisme général de construction d'une suite spectrale à partir d'un complexe différentiel filtré s'appliquera une fois que la différentielle de Floer préserve la filtration. C'est la raison pour laquelle nous sommes amenés à considérer une équation de Floer perturbée. Nous allons utiliser un champ de pseudo-gradient négatif pour la fonctionnelle d'action A_{H_ϵ} . Introduisons le champ de vecteurs Y_ϵ défini ci-dessous, où $\rho_\epsilon : [2A, 3A] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction lisse décroissante, égale à 1 au voisinage de $2A$ et égale à 0 au voisinage de $3A$, qui a le rôle de raccorder Y_ϵ à ∇H_ϵ .

$$Y_\epsilon = \begin{cases} \epsilon^\alpha \widetilde{J}_B \widetilde{X}_f \oplus J_V X_{H_\epsilon}^V, & \text{pour } S \leq 2A, \\ (\rho_\epsilon(S) \epsilon^\alpha \widetilde{J}_B \widetilde{X}_f + (1 - \rho_\epsilon(S)) \widetilde{J}_B X_{H_\epsilon}^H) \oplus J_V X_{H_\epsilon}^V, & \text{pour } 2A \leq S \leq 3A, \\ \nabla_J H_\epsilon, & \text{pour } S \geq 3A. \end{cases}$$

L'équation avec laquelle nous allons travailler est

$$u_s = \mathcal{Y}_\epsilon(u),$$

où

$$(4.23) \quad \mathcal{Y}_\epsilon(x(\cdot)) = -(J\dot{x} - Y_\epsilon) .$$

Ceci est une perturbation de l'équation de Floer habituelle dans la zone $S \leq 3A$. Il faut noter que, par la normalisation du couple (Ω, Θ) au-dessus des voisinages V_i des points critiques de f , le champ Y_ϵ coïncide avec ∇H_ϵ dans $\bigcup_i \pi^{-1}(V_i)$. Par conséquent, le champ \mathcal{Y} défini sur l'espace des lacets coïncide avec le gradient négatif de la fonctionnelle d'action au voisinage des points critiques, qui sont les orbites 1-périodiques de H_ϵ . Je montre ci-dessous que le champ \mathcal{Y} est un pseudo-gradient négatif pour la fonctionnelle d'action.

Pseudo-gradient pour la fonctionnelle d'action. Commençons par démontrer un lemme d'intérêt indépendant. Le point a) est juste un rappel, alors que le point b) donne une expression quantitative à l'absence d'orbites 1-périodiques pour un champ de vecteurs indépendant du temps qui est petit en norme C^1 .

Lemme 4.4.1. *Soit B une variété compacte. Soient X un champ de vecteurs (indépendant du temps) de classe C^1 sur B et g une métrique riemannienne sur B .*

a) Il existe une constante $\delta = \delta(B, g) > 0$ telle que, pour $\|X\|_{C^1} \leq \delta$, les orbites périodiques de X ayant une période plus petite ou égale à 1 sont constantes.

b) Soit X un champ de vecteurs vérifiant $\|X\|_{C^1} \leq \delta$ et V un voisinage ouvert des zéros de X . Il existe une constante $C = C(X, V)$ et $\epsilon_0 = \epsilon_0(X, V) > 0$ tels que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ et tout lacet $y : \mathbb{S}^1 \rightarrow B$ qui intersecte cV on a

$$(4.24) \quad \|\dot{y} - \epsilon X(y)\|_{L^2} \geq C\epsilon .$$

c) La conclusion du point b) est valable aussi sous la forme plus forte

$$(4.25) \quad \|\dot{y} - \epsilon X(y)\|_{L^1} \geq C\epsilon .$$

Remarque. Nous avons préféré d'énoncer séparément le point b), même s'il est impliqué par le point c) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour mettre en évidence le fait que la démonstration du c) est un peu plus délicate: elle utilise une injection de Sobolev non compacte.

Démonstration. a) Le résultat est vrai localement, pour un champ de vecteurs à support compact dans \mathbb{R}^n , avec une constante égale à 2π . En effet, soit $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une orbite T -périodique, $0 \leq T \leq 1$. Considérons son reparamétrage 1-périodique $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_T(s) = \gamma(Ts)$. En développant en série de Fourier, on obtient l'inégalité de Wirtinger $\|\dot{\gamma}_T\|_{L^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|\ddot{\gamma}_T\|_{L^2}$. D'un autre côté, on a $\frac{1}{2\pi} \|\ddot{\gamma}_T\|_{L^2} = \frac{T}{2\pi} \|dX(\gamma_T)\dot{\gamma}_T\| \leq \frac{\|dX\|}{2\pi} \|\dot{\gamma}_T\|_{L^2}$. Lorsque $\|dX\| < 2\pi$ on déduit $\|\dot{\gamma}\|_{L^2} = 0$ i.e. γ constante.

Pour démontrer le résultat sur la variété B , considérons un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)$ par des ouverts de carte et notons par η son nombre de Lebesgue. Modulo le fait de considérer un recouvrement plus fin pour résoudre les questions de compacité, on peut supposer que, pour chaque carte $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe une constante C_i telle que la métrique euclidienne soit dominée par $C_i \cdot (\phi_i^{-1})^*g$. Posons $\delta = \min\{\eta, (2\pi/C_i)\}$. La borne C^0 sur $\|X\|$ assure que toute orbite de période au plus égale à 1 est contenue dans un ouvert U_i , alors que la borne C^1 rend possible l'application du résultat local.

b) Soit $\Omega = {}^cV$. On sous entendra ci-dessous que le cercle \mathbb{S}^1 est normalisé de façon à avoir une longueur égale à 1. Démontrons d'abord l'affirmation pour $\epsilon = 1$. Par le point a),

tout lacet y qui intersecte Ω vérifie $\|\dot{y} - X(y)\|_{L^2} > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $y_n \in C^1(\mathbb{S}^1, B)$ de lacets qui vérifient $y_n(p) \in \Omega$ pour un certain $p \in \mathbb{S}^1$ fixé et $\|\dot{y}_n - X(y_n)\|_{L^2} \rightarrow 0$. Comme X est un champ lisse, on déduit que $\|\dot{y}_n\|_{L^2}$ est uniformément bornée. Le théorème d'Arzela-Ascoli assure qu'on a une injection compacte $H^1(\mathbb{S}^1, B) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, B)$. On peut donc extraire une sous-suite, notée encore y_n , qui converge uniformément vers un lacet y . En particulier \dot{y}_n converge vers \dot{y} dans \mathcal{D}' . D'un autre côté $X(y_n)$ converge uniformément vers $X(y)$ et on déduit $\dot{y}_n \xrightarrow{L^2} X(y)$. Par conséquent $X(y) = \dot{y}$ et $y(p) \in \Omega$. Cela est en contradiction avec le fait que les orbites 1-périodiques de X sont constantes.

Montrons maintenant que, pour $y : [0, 1] \rightarrow B$, $y(0) = y(1)$ et $\text{im}(y) \cap \Omega \neq \emptyset$ on a $\|\dot{y} - \epsilon X(y)\|_{L^2} \geq \frac{C}{2}\epsilon$ lorsque $\epsilon > 0$ est suffisamment petit. Posons $z : [0, \epsilon] \rightarrow B$, $z(\epsilon t) = y(t)$. L'inégalité désirée devient $\|\dot{z} - X(z)\|_{L^2(0, \epsilon)}^2 \geq C^2\epsilon$.

Comme un cas démonstratif, supposons que $\epsilon^{-1} \in \mathbb{N}$. Considérons le lacet z parcouru ϵ^{-1} fois, à savoir $\tilde{y} : [0, 1] \rightarrow B$, $\tilde{y}(t) = z(t - \epsilon \cdot [\frac{t}{\epsilon}])$. Par l'étape précédente on a $\|\dot{y} - X(y)\|_{L^2(0, 1)}^2 \geq C^2$, alors que $\|\dot{y} - X(y)\|_{L^2(0, 1)}^2 = \epsilon^{-1} \|\dot{z} - X(z)\|_{L^2(0, \epsilon)}^2$. Cela démontre l'inégalité pour tout ϵ tel que $\epsilon^{-1} \in \mathbb{N}$.

Dans le cas général, considérons la fonction

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} z(t - \epsilon \cdot [\frac{t}{\epsilon}]), & t \in [0, \epsilon \cdot [\frac{1}{\epsilon}]] , \\ z(0) (= z(\epsilon)), & t \in [\epsilon \cdot [\frac{1}{\epsilon}], 1] . \end{cases}$$

Le lacet \tilde{y} parcourt le lacet z itéré $[\frac{1}{\epsilon}]$ fois. Posons $\tilde{\epsilon} = 1 - \epsilon \cdot [\frac{1}{\epsilon}]$. On a $0 \leq \tilde{\epsilon} < \epsilon$ et on obtient

$$[\frac{1}{\epsilon}] \cdot \|\dot{z} - X(z)\|_{L^2(0, \epsilon)}^2 + \tilde{\epsilon} \|X(z(0))\|^2 = \|\dot{\tilde{y}} - X(\tilde{y})\|_{L^2(0, 1)}^2 \geq C^2 .$$

Lorsque $\epsilon < \frac{C^2}{2}(\sup \|X\|)^{-1}$ on obtient $[\frac{1}{\epsilon}] \cdot \|\dot{z} - X(z)\|_{L^2(0, \epsilon)}^2 \geq \frac{C^2}{2}$, ce qui implique $\|\dot{z} - X(z)\|_{L^2(0, \epsilon)}^2 \geq \frac{C^2}{4}\epsilon$.

c) Comme au point b), on montre d'abord qu'on a une inégalité $\|\dot{y} - X(y)\|_{L^1} \geq C > 0$. Supposons par l'absurde l'existence d'une suite y_n de lacets tels que $\|\dot{y}_n - X(y_n)\|_{L^1} \rightarrow 0$, avec $y(p) \in \Omega$ pour un $p \in \mathbb{S}^1$ fixé. On obtient $\|\dot{y}_n\|_{L^1} \leq C$. On a encore une injection $W^{1,1}(\mathbb{S}^1, B) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, B)$, mais elle n'est jamais compacte. Par contre, l'injection $W^{1,1}(\mathbb{S}^1, B) \hookrightarrow L^q(\mathbb{S}^1, B)$ est compacte pour tout $1 \leq q < \infty$ [Bz]. On peut donc extraire une sous-suite, qu'on note encore y_n , qui converge dans L^1 vers une limite y . Par une propriété spécifique de l'injection $W^{1,1}(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow C^0(\mathbb{S}^1)$ ([Bz], p. 130) on peut supposer que y_n converge *partout* (quoique pas uniformément). L'inégalité $\|X(y_n) - X(y)\|_{L^1} \leq \sup \|dX\| \cdot \|\text{dist}(y_n, y)\|_{L^1}$ entraîne $X(y_n) \xrightarrow{L^1} X(y)$ i.e. $\dot{y}_n \xrightarrow{L^1} X(y)$. En passant dans \mathcal{D}' on déduit $\dot{y} \in L^1$ i.e. $y \in W^{1,1}$, ou encore $y \in C^0(\mathbb{S}^1, B)$. D'un autre côté $\|\dot{y} - X(y)\|_{L^1} = 0$ et cela entraîne que y est une orbite périodique de X . La convergence partout de y_n entraîne que $y(p) \in \Omega$ et cela est la contradiction recherchée.

Le reste de la preuve découle comme au point b).

□

Corollaire 4.4.2. *Il existe $\epsilon_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ et tout lacet $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \hat{E}$ tel que $\text{im}(x) \cap {}^c \bigcup_i \pi^{-1}(V_i) \neq \emptyset$, on a*

$$(4.26) \quad \|\dot{x} - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f\|_{L^1} \geq C\epsilon^\alpha .$$

Démonstration. Décomposons $\dot{x} = \dot{x}^V + \dot{x}^H$, $\dot{x}^V \in V$, $\dot{x}^H \in H$. Alors $\|\dot{x} - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f\|_{L^1} \geq \|\dot{x}^H - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f\|_{L^1} = \|\frac{d}{dt} \pi \circ x - \epsilon^\alpha X_f\|_{L^1} \geq C\epsilon^\alpha$. La dernière inégalité est une conséquence du lemme précédent. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que le champ \mathcal{Y}_ϵ défini au (4.23) est un pseudo-gradient négatif pour l'action A_{H_ϵ} . Cela veut dire que $\langle \nabla A_{H_\epsilon}, \mathcal{Y}_\epsilon \rangle_{L^2}(x) \leq 0$, avec égalité si et seulement si x est une orbite périodique de H_ϵ . Il est utile d'écrire

$$\nabla_J H_\epsilon = Y_\epsilon + R_\epsilon^H,$$

avec $R_\epsilon^H = 0$ pour $S \geq 3A$ et $R_\epsilon^H = O^H(\epsilon^{\alpha+\delta})$ pour $S \leq 3A$. Pour simplifier les détails, je vais donner la démonstration du fait que $\langle \nabla A_{H_\epsilon}, \mathcal{Y}_\epsilon \rangle_{L^2}(x) \leq 0$ uniquement pour des lacets $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \widehat{E}$ dont l'image est contenue dans $S \leq 3A$. En vue du fait que $R_\epsilon^H = 0$ dans $\bigcup_i \pi^{-1}(V_i)$ on peut supposer que l'image de x rencontre $^c \bigcup_i \pi^{-1}(V_i)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \langle \nabla A_{H_\epsilon}, \mathcal{Y}_\epsilon \rangle_{L^2}(x) &= \int_{\mathbb{S}^1} \langle -Y_\epsilon(x(t)) + R_\epsilon^H(x(t)), \mathcal{Y}_\epsilon(x(t)) \rangle dt \\ &= -\|\mathcal{Y}_\epsilon(x)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{S}^1} \langle R_\epsilon^H(x(t)), \mathcal{Y}_\epsilon(x(t)) \rangle dt \\ &\leq -\|\dot{x}^H - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{S}^1} \langle R_\epsilon^H, \widetilde{J}_B(\dot{x}^H - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f) \rangle \\ &\leq \|\dot{x}^H - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f\|_{L^2}^2 + O(\epsilon^{\alpha+\delta}) \|\dot{x}^H - \epsilon^\alpha \widetilde{X}_f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Le corollaire 4.4.2 assure que cette dernière quantité est négative lorsque ϵ est suffisamment petit. Le calcul ci-dessus a été effectué en considérant sur la distribution horizontale la métrique $\pi^*\beta(\cdot, \widetilde{J}_B \cdot)$, mais il fonctionne de même pour la métrique $(\pi^*\beta + \epsilon\Omega)|_H(\cdot, \widetilde{J}_B \cdot)$. Cela achève la preuve du fait que \mathcal{Y}_ϵ est un pseudo-gradient pour la fonctionnelle d'action A_{H_ϵ} .

Estimations d'énergie. Cette section présente l'estimation d'énergie qui m'est encore nécessaire pour démontrer l'existence de la suite spectrale en homologie de Floer pour une fibration symplectique forte.

Rappelons le fait que, dans le chapitre 2 traitant la formule de Künneth, une étape cruciale à la fin de la démonstration consistait à montrer que les trajectoires de Floer qui, par l'absurde, auraient traversé la zone $\{S' \leq A\} \cap \{S'' \leq A\}$, devaient nécessairement avoir une grande énergie. Cela entraînait le fait que, en tronquant à un niveau *fixé* de l'action, toutes les trajectoires de Floer reliant les orbites périodiques en question étaient entièrement contenues dans la zone "normalisée" $\{S' \leq A\} \cap \{S'' \leq A\}$, où on était dans la situation d'un produit.

Je compte appliquer la même philosophie dans la situation présente. Les trajectoires qui nous intéressent sont les solutions de l'équation

$$(4.27) \quad \bar{\partial}_J u = Y_\epsilon(u),$$

$$(4.28) \quad u(s, \cdot) \longrightarrow x^\pm, \quad s \longrightarrow \pm\infty,$$

avec x^\pm des orbites 1-périodiques de H_ϵ avec une action comprise dans un intervalle $[0^-, \mu]$, $\mu > 0$ *fixé*. L'équation est normalisée dans la zone $S \leq 2A$: si la trajectoire u est entièrement contenue dans cette zone, alors sa projection sur la base vérifie l'équation de Floer $\bar{\partial}_{J_B}(\pi \circ u) = \nabla_{J_B} f(\pi \circ u)$. Si on savait montrer que *toutes* les solutions de (4.27 - 4.28) sont contenues dans

la zone $S \leq 2A$, alors on déduirait que la différentielle du complexe de Floer donné par (4.27 - 4.28) préserve la filtration. Cela justifierait le raisonnement de la section suivante.

L'approche que je propose pour démontrer que les solutions de l'équation (4.27 - 4.28) sont entièrement contenues dans la zone $S \leq 2A$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit est la suivante.

La fonctionnelle d'énergie naturellement associée aux équations (4.27 - 4.28) est

$$(4.29) \quad E_{Y_\epsilon}(u) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, u_t + JY_\epsilon) .$$

Cette quantité est définie pour toute application $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \widehat{E}$ qui vérifie (4.28). Si u vérifie aussi (4.27) alors on aura de plus

$$E_{Y_\epsilon}(u) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |u_s|^2 = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |u_t + JY_\epsilon|^2 .$$

D'un autre côté, on a

$$A_{H_\epsilon}(x^-) - A_{H_\epsilon}(x^+) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, u_t + J\nabla H_\epsilon) .$$

J'affirme qu'il suffit de démontrer l'assertion suivante.

Conjecture 4.4.3 (lemme de monotonie hamiltonienne). *Toute solution de l'équation*

$$\bar{\partial}_{\tilde{J}_B \oplus J_V} u = \epsilon^\alpha \widetilde{\nabla_{J_B} f} ,$$

vérifiant $u(s, \cdot) \longrightarrow x^\pm$, $s \longrightarrow \pm\infty$ avec x^\pm deux lacets contenus dans la zone $S \leq 1^+$, vérifie la propriété suivante :

Si l'image de u intersecte le niveau $S = 2A$, alors

$$(4.30) \quad \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |u_s|^2 \geq C\epsilon A .$$

Ceci est l'analogue fibré du lemme 2.4.1. Dans la démonstration de la formule de Künneth, l'existence d'une projection sur l'un des facteurs (qui joue le rôle de la fibre si on pense à un produit comme étant une fibration triviale) permettait de conclure : la composante de u dans la direction de la fibre était une courbe holomorphe et on pouvait appliquer le lemme de monotonie de Gromov. Dans la situation fibrée, il n'y a pas de telle projection. Un substitut serait fourni par le transport parallèle, mais ce dernier ne préserve généralement pas la structure presque complexe dans la fibre. Par contre, cela est vrai pour les fibrés en droites (négatifs) et démontre l'assertion 4.4.3 dans ce cas particulier. Cette situation est discutée en détail au 4.5.

En supposant que l'assertion 4.4.3 est vraie, voici comment on conclut quand au fait que les trajectoires qui relient des orbites 1-périodiques d'action comprise dans un intervalle $[0, \mu]$, $\mu > 0$ fixé doivent rester à l'intérieur de la zone $S \leq 2A$ lorsque ϵ est suffisamment petit.

Soit u une telle trajectoire et supposons qu'elle traverse le niveau $S = 2A$. Par 4.4.3 on obtient $E_{Y_\epsilon}(u) \geq C\epsilon A$. Nous allons prouver que $A_{H_\epsilon}(x^-) - A_{H_\epsilon}(x^+)$ est plus grand que $\tilde{C}\epsilon A$ si ϵ est suffisamment petit. Puisque, par le choix de A , la quantité ϵA tend vers $+\infty$ lorsque ϵ tend vers 0^+ , cela fournit la contradiction recherchée.

On a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, u_t - X_{H_\epsilon}) &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, u_t + JY_\epsilon) + \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, JR_\epsilon^H) \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |u_s|^2 + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |u_t + JY_\epsilon|^2 + \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, JR_\epsilon^H) . \end{aligned}$$

Nous allons montrer que

$$(4.31) \quad E_{Y_\epsilon}(u) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} \Omega_\epsilon(u_s, u_t + JY_\epsilon) \geq \frac{1}{\epsilon^{\delta/4}} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1} |\Omega_\epsilon(u_s, R_\epsilon)|$$

lorsque ϵ est suffisamment petit. Cela assure que, dans l'expression de $\iint \Omega_\epsilon(u_s, u_t - X_{H_\epsilon})$, le terme dominant est $E_{Y_\epsilon}(u)$ et entraîne la conclusion. Nous allons montrer que (4.31) est vraie sur chaque lacet $u(s, \cdot)$. Pour simplifier, je ferai de nouveau le calcul uniquement dans le cas où $u(s, \cdot)$ est contenu dans la zone $S \leq 3A$.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u_s|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u_t + JY_\epsilon|^2 - \frac{1}{\epsilon^{\delta/4}} \int_{\mathbb{S}^1} |\Omega_\epsilon(u_s, JR_\epsilon)| \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u_s|^2 - \frac{1}{\epsilon^{\delta/4}} \int_{|u_s| \geq \epsilon^{\alpha-\delta/2}} |\Omega_\epsilon(u_s, JR_\epsilon)| + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} |u_t + JY_\epsilon|^2 - \frac{1}{\epsilon^{\delta/4}} \int_{|u_s| \leq \epsilon^{\alpha-\delta/2}} |\Omega_\epsilon(u_s, JR_\epsilon)| \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{|u_s| \geq \epsilon^{\alpha-\delta/2}} \left(|u_s|^2 - C|u_s| \frac{1}{\epsilon^{\delta/4}} \epsilon^{\alpha+\delta} \right) + \left(\epsilon^{2\alpha} - \frac{C}{\epsilon^{\delta/4}} \cdot \epsilon^{\alpha-\delta/2} \cdot \epsilon^{\alpha+\delta} \right) . \end{aligned}$$

Les deux quantités entre parenthèses deviennent positives lorsque ϵ est suffisamment petit. Cela finit de prouver que l'assertion 4.4.3 est suffisante pour conclure que, lorsque ϵ est suffisamment petit, la différentielle de Floer dans le complexe correspondant aux équations (4.27 - 4.28) préserve la filtration (4.22).

4.4.2 Suites spectrales et passages à la limite

Je donne dans cette section la démonstration du théorème principal, en supposant acquis les résultats de la section précédente. Rappelons que la conséquence principale de ceux-ci est la suivante: pour $\mu > 0$ fixé et $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$, la filtration déterminée sur le complexe de Floer par l'opposé de l'indice de Conley-Zehnder des points critiques de f (regardés en tant qu'orbites 1-périodiques) est préservée par la différentielle de Floer, cette dernière étant considérée par rapport au champ de pseudo-gradient \mathcal{Y}_ϵ défini au (4.23), ou encore $\bar{\partial}_J u = Y_\epsilon(u)$:

$$F_p C_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) = \bigoplus_{\substack{x \in \mathcal{P}(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) \\ -i_{CZ}(\pi(x)) \geq p \\ A_{H_\epsilon}(x) \in [0^-, \mu]}} \mathbb{K}\langle x \rangle \subseteq FC_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) .$$

Pour faciliter l'écriture, on notera l'inclusion précédente par

$$F_p C^*(\epsilon, \mu) \subseteq FC^*(\epsilon, \mu) .$$

Proposition 4.4.4. Soient $\mu \leq \mu'$ fixés. Pour tous $\epsilon' \leq \epsilon$ on a le diagramme commutatif de complexes différentiels filtrés

$$(4.32) \quad \begin{array}{ccc} FC^*(\epsilon, \mu) & \xleftarrow{i_{\epsilon, \mu}^{\epsilon'}} & FC^*(\epsilon', \mu) \\ i_{\mu, \epsilon}^{\mu'} \uparrow & & \uparrow i_{\mu, \epsilon'}^{\mu'} \\ FC^*(\epsilon, \mu') & \xleftarrow{i_{\epsilon, \mu'}^{\epsilon'}} & FC^*(\epsilon', \mu') \end{array}$$

avec $i_{\mu, \epsilon}^{\mu'}$, $i_{\mu, \epsilon'}^{\mu'}$ les morphismes de troncature par l'action et $i_{\epsilon, \mu}^{\epsilon'}$, $i_{\epsilon, \mu'}^{\epsilon'}$ les morphismes induits par la déformation simultanée de $(H_\epsilon, \Omega_\epsilon)$ vers $(H_{\epsilon'}, \Omega_{\epsilon'})$.

Démonstration. La commutativité du diagramme au niveau des complexes différentiels *non filtrés* est juste une conséquence des définitions des morphismes de monotonie et de troncature en (co)homologie de Floer (on pourra trouver un diagramme du même type par exemple dans [CFH2], p. 112). Le fait que les morphismes $i_{\mu, \epsilon'}^{\mu'}$ et $i_{\mu, \epsilon}^{\mu'}$ préservent les filtrations respectives est tautologique: ils ne font qu'“enlever” des générateurs des groupes en question, sans pour autant modifier l'indice de Conley-Zehnder des générateurs qui restent. Le fait que les morphismes $i_{\epsilon, \mu}^{\epsilon'}$ et $i_{\epsilon, \mu'}^{\epsilon'}$ préservent la filtration est une conséquence du fait qu'on peut déformer $(H_\epsilon, \Omega_\epsilon)$ vers $(H_{\epsilon'}, \Omega_{\epsilon'})$ par une équation qui, dans la zone d'apparition des trajectoires de Floer à paramètre, est du type

$$\bar{\partial}_{J_s} u = \rho(s) \epsilon^\alpha \widetilde{J_B X_f} \oplus J_V X_{H_\epsilon(s)}^V .$$

Ici $H_\epsilon(s)$ désigne l'homotopie de H_ϵ à $H_{\epsilon'}$ et $\rho(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de raccord qui vaut 1 pour $s \leq 0$ et $\epsilon'^\alpha / \epsilon^\alpha$ pour $s \geq 1$. Les solutions de cette équation se projettent alors sur des solutions de l'équation $\bar{\partial}_{J_B} u = \rho(s) \epsilon^\alpha J_B X_f$. La limite en temps positif d'une telle solution a nécessairement un indice de Conley-Zehnder plus grand ou égal à celui de la limite en temps négatif et cela conclut. \square

Remarque. Dans le diagramme ci-dessus, le morphisme $i_{\epsilon, \mu}^{\epsilon'}$ induit un isomorphisme en cohomologie lorsque ϵ est suffisamment petit: au cours de la déformation $\epsilon \rightsquigarrow \epsilon'$, $\epsilon' \leq \epsilon$ il y a des orbites nouvelles d'action positive qui se créent, mais leur action est beaucoup plus grande que μ . Ainsi, les groupes d'homologie $FH^*(\epsilon, \mu)$ se stabilisent pour ϵ suffisamment petit et μ fixé.

La filtration $F_p C^*(\epsilon, \mu) \subset FC^*(\epsilon, \mu)$ donne naissance à une suite spectrale

$$(4.33) \quad E_r^{p,q}(\epsilon, \mu) \implies FH_{[0-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) .$$

Corollaire 4.4.5. On a un système projectif de suites spectrales, bi-dirigé selon ϵ et μ

$$(4.34) \quad \begin{array}{ccc} E_r^{p,q}(\epsilon, \mu) & \xleftarrow{i_{\epsilon, \mu}^{\epsilon'}} & E_r^{p,q}(\epsilon', \mu) \\ i_{\mu, \epsilon}^{\mu'} \uparrow & & \uparrow i_{\mu, \epsilon'}^{\mu'} \\ E_r^{p,q}(\epsilon, \mu') & \xleftarrow{i_{\epsilon, \mu'}^{\epsilon'}} & E_r^{p,q}(\epsilon', \mu') , \end{array}$$

pour $\epsilon' \leq \epsilon$ et $\mu \leq \mu'$.

Démonstration. Le diagramme (4.34) est induit par le diagramme de complexes différentiels filtrés (4.32). \square

Corollaire 4.4.6. *Posons*

$$(4.35) \quad E_r^{p,q} = \varprojlim_{(\epsilon, \mu)} E_r^{p,q}(\epsilon, \mu) = \varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} E_r^{p,q}(\epsilon, \mu) .$$

Alors $E_r^{p,q}$ est une suite spectrale qui vérifie

$$E_r^{p,q} \implies \varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} FH_{[0-, \mu]}^*(H_{\epsilon}, \Omega_{\epsilon}) .$$

Démonstration. Il s'agit tout simplement de montrer que chaque suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{im} d_r^{p-r, q+r-1}(\epsilon, \mu) \longrightarrow \ker d_r^{p,q}(\epsilon, \mu) \longrightarrow E_{r+1}^{p,q} \longrightarrow 0$$

reste exacte lorsqu'on prend la limite projective. C'est en ce point que nous avons besoin de travailler à coefficients dans un corps: la limite projective est alors un foncteur exact, en vue du fait que la dimension des espaces vectoriels en question est finie (ce sont des sous-quotients de $FH_{[0-, \mu]}^*(H_{\epsilon}, \Omega_{\epsilon})$ - un espace vectoriel de dimension finie). \square

Il suffit maintenant de répondre aux deux questions ci-dessous pour établir une suite spectrale qui soit un invariant de la fibration \widehat{E} :

- calculer $\varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} FH_{[0-, \mu]}^*(H_{\epsilon}, \Omega_{\epsilon})$.
- calculer $\varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} E_2^{p,q}(\epsilon, \mu)$ (et, si possible, calculer aussi $E_2^{p,q}(\epsilon, \mu)$) .

La réponse à la première question est fournie par la proposition 4.4.7 et son corollaire. La réponse à la deuxième question est donnée par la proposition 4.4.9.

Proposition 4.4.7. *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\epsilon(\mu) > 0$ tel que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon(\mu)$, on ait*

$$FH_{[0-, \mu]}^*(H_{\epsilon}, \Omega_{\epsilon}) \simeq FH_{[0-, \mu]}^*(\widehat{E}, \Omega_{\epsilon}) .$$

Corollaire 4.4.8. *On a*

$$\varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} FH_{[0-, \mu]}^*(H_{\epsilon}, \Omega_{\epsilon}) = FH^*(\widehat{E}, [\Omega_{\epsilon}]) .$$

On rappelle que la notation $FH^*(\widehat{E}, [\Omega_{\epsilon}])$ désigne l'homologie de Floer de \widehat{E} calculée par rapport à un représentant quelconque de la classe d'isotopie de l'une des formes symplectiques Ω_{ϵ} .

Démonstration. Par la proposition 4.4.7 on a $\varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} FH_{[0-, \mu]}^*(H_{\epsilon}, \Omega_{\epsilon}) = \varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} FH_{[0-, \mu]}^*(\widehat{E}, \Omega_{\epsilon})$.

Mais les groupes $FH_{[0-, \mu]}^*(\widehat{E}, \Omega_{\epsilon})$ forment un système projectif bidirigé et on peut écrire, par la propriété générale de commutation des limites projectives:

$$\begin{aligned} \varprojlim_{\mu} \varprojlim_{\epsilon} FH_{[0-, \mu]}^*(\widehat{E}, \Omega_{\epsilon}) &= \varprojlim_{\epsilon} \varprojlim_{\mu} FH_{[0-, \mu]}^*(\widehat{E}, \Omega_{\epsilon}) \\ &= \varprojlim_{\epsilon} FH^*(\widehat{E}, \Omega_{\epsilon}) = FH^*(\widehat{E}, [\Omega_{\epsilon}]) . \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme a lieu grâce à l'invariance par isotopie de l'homologie de Floer. \square

Démonstration de la proposition 4.4.7. Pour faciliter la lecture, on utilise au cours de cette démonstration $\bar{\epsilon}$ comme notation alternative pour $\epsilon(\mu)$. Choisissons $\bar{\epsilon}$ tel que $\mu \ll \lambda_{\max}(\bar{\epsilon})$. Soit $\epsilon \in]0, \bar{\epsilon}[$ arbitraire. Nous allons montrer que $FH_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) \simeq FH_{[0^-, \mu]}^*(\hat{E}, \Omega_\epsilon)$.

On peut trouver μ_1, μ_2 et λ tels que $\mu \ll \mu_1 < \lambda < \mu_2 < \lambda_{\max}(\epsilon)$ et

$$k_{\mu_1} \prec H_{\epsilon, \lambda} \prec k_{\mu_2} \prec H_\epsilon.$$

Ici $k_{\mu_1} = k_{\mu_1}(S_\epsilon)$ et $k_{\mu_2} = k_{\mu_2}(S_\epsilon)$ sont des hamiltoniens habituels qui prennent en compte les caractéristiques sur $\partial E = \Sigma$ par rapport à la forme de contact Θ_ϵ et vérifient $k'_{\mu_1} = \mu_1$, $k'_{\mu_2} = \mu_2$ en dehors d'un petit voisinage de ∂E (Figure 1.1 (3)). De plus, on peut choisir les μ_i , $i = 1, 2$ d'autant plus proches de $\lambda_{\max}(\epsilon)$ que ϵ est petit (car la perturbation donnée par $\epsilon^\alpha \tilde{f}$ devient négligeable, alors que le terme vertical approxime de mieux en mieux une croissance le long de Z_ϵ). On peut aussi supposer $\mu_1, \mu_2 \notin \text{Spec}(\partial E, \Theta_\epsilon)$, car le complémentaire du spectre d'action est partout dense dans \mathbb{R}_+ pour *tout* choix de Σ . On déduit le diagramme commutatif suivant donné par les morphismes de monotonie (où tous les groupes de cohomologie de Floer sont considérés par rapport à la forme symplectique Ω_ϵ et par rapport à l'équation de Floer habituelle, non perturbée) :

$$\begin{array}{ccccccc} FH_{[0^-, \mu]}^*(k_{\mu_1}, \Omega_\epsilon) & \xleftarrow{g_1} & FH_{[0^-, \mu]}^*(H_{\epsilon, \lambda}, \Omega_\epsilon) & \xleftarrow{g_2} & FH_{[0^-, \mu]}^*(k_{\mu_2}, \Omega_\epsilon) & \xleftarrow{g_3} & FH_{[0^-, \mu]}^*(H_\epsilon, \Omega_\epsilon) \\ & \searrow f_1 & \searrow f_2 & & \nearrow f_3 & \nearrow f_4 & \\ & & FH_{[0^-, \mu]}^*(\hat{E}, \Omega_\epsilon) & & & & \end{array}$$

Comme indiqué sur le diagramme commutatif, les flèches f_1 et f_3 sont des isomorphismes. Cela est dû au fait que les hamiltoniens de la forme $k_{\mu'}$, $\mu' > 0$ forment une famille cofinale dont l'homologie tronquée à $[0^-, \mu]$ se stabilise dès que $\mu' > \mu$.

D'un autre côté, la déformation $H_{\epsilon, \lambda} \rightsquigarrow H_\epsilon = H_{\epsilon, \lambda_{\max}}$ peut être réalisée par des hamiltoniens du type $H_{\epsilon, \tilde{\lambda}}$, $\lambda \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda_{\max}$. L'homologie ne change pas puisque les orbites nouvellement créées dont l'action est positive auront une action beaucoup plus grande que μ . On déduit que $g_2 \circ g_3$ est un isomorphisme.

Nous pouvons conclure. Puisque $g_2 \circ g_3$ est un isomorphisme, on déduit que g_2 est surjective. D'un autre côté, $g_1 \circ g_2$ est un isomorphisme et on déduit que g_2 est injective. Par conséquent g_2 est un isomorphisme et g_3 aussi. Mais $f_3 = g_3 \circ f_4$ et cela entraîne que f_4 est aussi un isomorphisme. \square

Proposition 4.4.9. *On a*

$$\lim_{\leftarrow \mu} \lim_{\leftarrow \epsilon} E_2^{p, q}(\epsilon, \mu) = \lim_{\leftarrow \epsilon} E_2^{p, q}(\epsilon, \mu(\epsilon)) = H^{n+p}(B, f; \mathcal{FH}^q(\hat{F})) .$$

On désigne ci-dessus par $\mu(\epsilon)$ l'action maximale d'une orbite 1-périodique de H_ϵ , alors que $\mathcal{FH}^q(\hat{F})$, $q \in \mathbb{Z}$ représente un système local de coefficients de fibre $FH^q(\hat{F}, \Omega)$. On désigne par $FH^*(\hat{F}, \Omega)$ la classe d'isomorphisme de l'homologie de Floer $FH^*(\hat{F}_z, \Omega_z)$, $z \in B$. Elle est définie sans ambiguïté en vue de l'invariance par isotopie de l'homologie de Floer.

Démonstration. Un calcul similaire à celui que nous avons détaillé pour l'homologie de Morse montre que

$$(4.36) \quad E_1^{p,q}(\epsilon, \mu(\epsilon)) = \bigoplus_{\substack{\text{ind}_{\text{Morse}}(z) = n+p \\ z \in \text{Crit}(f)}} FH^q(\widehat{F}_z, \epsilon),$$

avec $FH^q(\widehat{F}_z, \epsilon)$ l'homologie du complexe engendré par les orbites périodiques d'une même fibre \widehat{F}_z et dont la différentielle est obtenue en comptant les trajectoires de Floer de H_ϵ entièrement contenues dans la fibre en question. J'affirme que chaque groupe $FH^q(\widehat{F}_z, \epsilon)$ est naturellement muni de flèches

$$(4.37) \quad FH_{[0-, c\mu(\epsilon)]}^*(\widehat{F}_z, \Omega_z) \longleftarrow FH^q(\widehat{F}_z, \epsilon) \longleftarrow FH_{[0-, C\mu(\epsilon)]}^*(\widehat{F}_z, \Omega_z),$$

où $c < C$ sont deux constantes strictement positives indépendantes de ϵ et z . De plus, la composition de ces deux morphismes coïncide avec le morphisme de troncature par l'action $FH_{[0-, c\mu(\epsilon)]}^*(\widehat{F}_z, \Omega_z) \longleftarrow FH_{[0-, C\mu(\epsilon)]}^*(\widehat{F}_z, \Omega_z)$.

En effet, l'équation des trajectoires de Floer contenues dans la fibre \widehat{F}_z pour H_ϵ par rapport à Ω_ϵ (ou, ce qui revient au même, par rapport à $\epsilon\Omega$) coïncide avec l'équation des trajectoires de Floer pour $H_{\lambda_{\max}}^A$ par rapport à Ω . Les orbites qui entrent dans le calcul de $E_1^{p,q}(\epsilon, \mu(\epsilon))$ ont une période $\leq \mu(\epsilon)$ par rapport à R_ϵ . Or, dans les voisinages de trivialisations au-dessus de $\text{Crit}(f)$, on a $R_\epsilon = \frac{1}{\Lambda(R_\theta) + \epsilon} R_\theta$. Par conséquent, la période maximale de ces orbites *par rapport* à R_θ est comprise dans l'intervalle $[c\mu(\epsilon), C\mu(\epsilon)]$, avec $c = \min(\Lambda(R_\theta) + \epsilon)$, $C = \max(\Lambda(R_\theta) + \epsilon)$. La composante de $E_1^{p,q}$ au-dessus du point $z \in \text{Crit}(f)$ est alors l'homologie d'un sous-complexe noté $FC^*(\widehat{F}_z, \epsilon)$ muni des morphismes de troncature par l'action

$$FC_{[0-, c\mu(\epsilon)]}^*(\widehat{F}_z) \longleftarrow FC^*(\widehat{F}_z, \epsilon) \longleftarrow FC_{[0-, C\mu(\epsilon)]}^*(\widehat{F}_z).$$

En passant en homologie on obtient les morphismes (4.37).

D'un autre côté, comme en homologie de Morse, on associe à toute trajectoire de Floer γ sur la base un morphisme

$$\Phi_{\gamma}^{\bar{z}, z} : FC^*(\widehat{F}_z, \epsilon) \longrightarrow FC^*(\widehat{F}_{\bar{z}}, \epsilon)$$

en comptant les trajectoires de Floer sur \widehat{E} qui se projettent sur γ . Il faut remarquer le fait que, lorsque f est suffisamment petite en norme C^2 , une telle trajectoire γ est en fait une trajectoire de gradient [F4]. Le morphisme $\Phi_{\gamma}^{\bar{z}, z}$ passe en cohomologie pour définir un *isomorphisme* et donc un système pré-local de coefficients (au sens de la définition 3.3.10). Nous notons ce système pré-local de coefficients par $\mathcal{FH}^*(\widehat{F}, c\mu(\epsilon), C\mu(\epsilon))$.

La famille de systèmes pré-locaux $\mathcal{FH}^*(\widehat{F}, c\mu(\epsilon), C\mu(\epsilon))$ forme en fait un système projectif (respectivement inductif si on avait travaillé en homologie) de systèmes locaux. Cela est facile à voir tenant compte du fait que, dans les fibres critiques, les hamiltoniens H_ϵ valent $H_{\lambda_{\max}}^A$: les déformations $H_\epsilon \rightsquigarrow H_{\epsilon'}$ induisent des déformations $H_{\lambda_{\max}}^A \rightsquigarrow H_{\lambda'_{\max}}^{A'}$ qui donnent, en cohomologie, des morphismes compatibles avec les flèches $\Phi_{\gamma}^{\bar{z}, z}$. La compatibilité découle toujours de la commutativité du diagramme (4.32). On pose

$$(4.38) \quad \mathcal{FH}^*(\widehat{F}) = \varprojlim_{\epsilon} \mathcal{FH}^*(\widehat{F}, c\mu(\epsilon), C\mu(\epsilon)).$$

La fibre de $\mathcal{FH}^*(\widehat{F})$ au point $z \in \text{Crit}(f)$ est évidemment $\lim_{\leftarrow \epsilon} FH^*(\widehat{F}_z, \epsilon)$. Grâce à l'existence des morphismes (4.37) et tenant compte de l'égalité

$$\lim_{\leftarrow \epsilon} FH^*_{[0-, c\mu(\epsilon)]}(\widehat{F}_z, \Omega_z) = \lim_{\leftarrow \epsilon} FH^*_{[0-, C\mu(\epsilon)]}(\widehat{F}_z, \Omega_z) = FH^*(\widehat{F}, \Omega)$$

on obtient

$$(4.39) \quad \lim_{\leftarrow \epsilon} FH^*(\widehat{F}_z, \epsilon) = FH^*(\widehat{F}, \Omega) .$$

Le même calcul que pour l'homologie de Morse démontre que

$$E_2^{p,q}(\epsilon, \mu(\epsilon)) = H^{n+p}(B, f ; \mathcal{FH}^*(\widehat{F}, c\mu(\epsilon), C\mu(\epsilon))) .$$

On en déduit

$$\lim_{\leftarrow \epsilon} E_2^{p,q}(\epsilon, \mu(\epsilon)) = H^{n+p}(B, f ; \mathcal{FH}^q(\widehat{F}, \Omega)) .$$

□

Remarque 4.4.10. Cette démonstration achève en fait la preuve du théorème 4.2.1 : les morphismes de troncature par l'action qui fournissent la flèche depuis la cohomologie de Floer vers la cohomologie de Morse sont compatibles avec tous les diagrammes commutatifs écrits précédemment.

4.5 Fibrés en droites négatifs

J'explique dans cette section comment fonctionne la démonstration du théorème 4.2.1 dans le cas des fibrés en droites admettant une métrique hermitienne à courbure négative.

Une première remarque importante est que l'estimation d'énergie 4.4.3 est vraie dans ce contexte. La distribution horizontale n'a pas de composante le long de $\frac{\partial}{\partial S}$ et cela fait que, pour une courbe qui s'appuie sur les niveaux $S = A$ et $S = 2A$ et qui vérifie $\bar{\partial}u = \epsilon^\alpha \widetilde{\nabla_{J_B} f}$, la contribution le long de $\frac{\partial}{\partial S}$ est donnée uniquement par sa composante verticale. En utilisant le fait que, pour un tel fibré en droites, le transport parallèle préserve la structure presque complexe dans les fibres, on peut regarder la composante verticale en "projection" sur la fibre, où elle vérifie $\bar{\partial}u^V = 0$ et s'appuie sur les niveaux $S = A$ et $S = 2A$. Le lemme de monotonie de Gromov permet alors de conclure, à la manière du lemme 2.4.1.

Je donne maintenant une démonstration beaucoup plus simple, qui contourne entièrement tous les problèmes liés à l'estimation d'énergie, aux trajectoires de pseudo-gradient ou au passage à la limite selon ϵ . Commençons par une remarque simple, mais importante.

Proposition 4.5.1. *Soit (Σ, λ) une variété de contact et $(\Sigma \times [1, \infty[, d(S\lambda))$ sa complétée symplectique. On fixe une structure presque complexe standard J sur $\Sigma \times [1, \infty[$ (cf. 1.2.1). Pour toute fonction $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{f} : \Sigma \times [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(x, S) = f(x)$ est un hamiltonien asymptotiquement nul.*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $|X_f|_{(x,S)}/\sqrt{S} \rightarrow 0$, $S \rightarrow \infty$. On note X_{Reeb} le champ de Reeb sur Σ et $X_\xi(x, S)$ la composante de $X_f(x, S)$ sur la distribution de contact $\xi = \ker \lambda$. On a

$$\begin{aligned} |X_f|_{(x,S)}^2 &= \left| \frac{1}{S} X_\xi(x, 1) + df_x(X_{\text{Reeb}}(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial S} \right|_{(x,S)}^2 \\ &= S \left| \frac{1}{S} X_\xi(x, 1) + \frac{1}{S} df_x(X_{\text{Reeb}}(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial S} \right|_{(x,1)}^2 \\ &= \frac{1}{S} |X_f(x, 1)|_{(x,1)}^2. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé ci-dessus la propriété d'homogénéité (1.21) de la métrique conique. On déduit que non seulement $|X_f|_{(x,S)}/\sqrt{S}$ tend vers zéro lorsque S tend vers $+\infty$, mais qu'on a même $|X_f|_{(x,S)} \rightarrow 0$. □

Cette observation simple, combinée au fait que les champs de Liouville Z_ϵ sont colinéaires au champ de Liouville Z dans les fibres, est le point crucial qui fait marcher cette preuve alternative. La nouvelle démarche est la suivante :

On fixe $\epsilon > 0$. On fixe aussi une fonction de Morse $f : B \rightarrow \mathbb{R}$. Il existe une famille de hamiltoniens admissibles qui est cofinale et dont les orbites 1-périodiques sont transversalement non dégénérées et apparaissent dans les fibres critiques de f : on pose

$$(4.40) \quad H_\lambda = a(\lambda)\tilde{f} + k_\lambda(S_\epsilon), \quad \lambda > 0.$$

Ici k_λ désigne un hamiltonien de la forme habituelle (Figure 1.1 (3)), convexe, positif et dont la pente vaut λ en dehors d'un petit voisinage de la zone $S_\epsilon \leq 1$. La fonction $a(\lambda)$ est une fonction strictement positive qui tend vers zéro lorsque λ tend vers $+\infty$. Comme d'habitude, on prend $f < 0$.

Les hamiltoniens H_λ sont asymptotiquement linéaires en vue de la proposition 4.5.1 et leur cofinalité est claire vu qu'on permet des valeurs de λ qui sont arbitrairement grandes. Le champ hamiltonien par rapport à $\Omega_\epsilon = d(S_\epsilon \Theta_\epsilon|)$ est

$$X_{H_\lambda}(x, S_\epsilon) = \frac{a(\lambda)}{S_\epsilon} \tilde{X}_f + a(\lambda) df_x(R_\epsilon) \frac{\partial}{\partial S_\epsilon} - k'_\lambda(S_\epsilon) R_\epsilon.$$

Nous avons noté par R_ϵ le champ de Reeb sur $\Sigma = \{S_\epsilon = 1\}$. Dans le calcul précédent nous avons utilisé le fait que le flot du champ de Liouville Z_ϵ préserve la distribution horizontale. De plus, celle-ci est tangente à Σ et R_ϵ est un champ vertical si on choisit comme hypersurface Σ le fibré en sphères (unitaires) correspondant à la métrique hermitienne sur le fibré \mathcal{L} . Les caractéristiques sur Σ sont alors concentrées dans les fibres.

La composante horizontale de X_{H_λ} est donnée par \tilde{X}_f . Les orbites de X_{H_λ} se projettent sur les orbites de X_f . En choisissant f petite en norme C^2 on déduit que les orbites 1-périodiques de X_{H_λ} sont concentrées dans les fibres critiques de \tilde{f} .

En fait la situation est très simple aussi pour ce qui est de l'équation de Floer : vu qu'il n'y a pas de terme perturbatif horizontal, le champ \mathcal{Y}_{H_λ} avec lequel on travaille est maintenant le vrai champ de gradient (négatif) de l'action A_{H_λ} . De plus, toute structure presque complexe de la forme $J = J_V \oplus \tilde{J}_B$, avec J_V standard sur les fibres, est aussi standard par rapport à la forme symplectique $d(S_\epsilon \Theta_\epsilon|)$. Les trajectoires de Floer dans l'espace total se projettent sur les

trajectoires de Floer dans la base et l'équation de Floer est bien définie sans passer par une extension aux champs de pseudo-gradient.

Le théorème 4.2.1 est par conséquent entièrement démontré pour un fibré en droites admettant une métrique hermitienne à courbure négative. Comme corollaires, on a les résultats suivants.

Corollaire 4.5.2. *Soit \mathcal{L} un fibré en droites admettant une métrique hermitienne à courbure négative. On a*

$$(4.41) \quad FH^*(\mathcal{L}) = 0 .$$

Démonstration. On utilise le fait que $FH^*(\mathbb{C}) = 0$. Le système de coefficients qui donne le deuxième terme de la suite spectrale 4.2.1 est nul. Par conséquent $E_2 = 0$ et $E_\infty = 0$. \square

Corollaire 4.5.3. *Toute hypersurface de type contact restreint contenue dans un fibré \mathcal{L} du type précédent admet une caractéristique fermée.*

Démonstration. Ceci est une conséquence de la proposition 1.1.10. \square

Finissons par quelques remarques.

Remarque 4.5.4. Cette solution alternative correspond au phénomène géométrique suivant. Les orbites 1-périodiques d'un hamiltonien du type $k_\lambda(S_\epsilon)$ ne sont pas transversalement non dégénérées, mais s'organisent en *des variétés non dégénérées au sens de Morse-Bott*, de dimension égale à $\dim B + 1$. C'est l'analogue fibré de la situation qu'on rencontre pour une boule dans \mathbb{C}^n (cf. 1.1.5). Le fait de rajouter la relevée d'une fonction de Morse sur la base correspond à casser ces variétés de Morse-Bott en orbites 1-périodiques transversalement non dégénérées. Comme nous l'avons convenu au chapitre 1, nous n'avons pas insisté sur le fait que, en théorie, ces dernières doivent aussi être cassées en couples d'orbites non dégénérées par une perturbation dépendant du temps. Nous avons explicité dans 1.1.5 une construction de ce type pour les boules de \mathbb{C}^n .

Remarque 4.5.5. *Cette deuxième solution applique de manière essentielle le formalisme des hamiltoniens asymptotiquement linéaires que nous avons développé au 1.2.*

Remarque 4.5.6. Noter le fait que, dans le cas général d'une fibration symplectique forte au sens de la définition 4.1.2, il y a une foule d'obstacles pour appliquer la démonstration ci-dessus. Même le point de départ ne fonctionne pas, à savoir *montrer que \tilde{f} est un hamiltonien asymptotiquement nul*. D'ailleurs, l'estimation d'énergie 4.4.3 est mise en jeu précisément à cause du fait qu'on ne connaît pas le comportement de \tilde{f} dans une métrique conique par rapport à un Z_ϵ arbitraire.

FIN

BIBLIOGRAPHIE

- [AB] D.M. Austin, P.J. Braam, Morse-Bott theory and equivariant cohomology. In *The Floer Memorial Volume*, H. Hofer, C. Taubes, A. Weinstein, E. Zehnder, Eds., Birkhauser, 1994.
- [Bi] A.-L. Biolley, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Decembre 2003.
- [B] P. Biran, Lagrangian barriers and symplectic embeddings, *Geom. Funct. Anal.* *11* (2001), 407-464.
- [BPS] P. Biran, L. Polterovich, D. Salamon, Propagation in hamiltonian dynamics and relative symplectic homology, *Duke Math. J.* *119* (2003), no. 1, 65-118.
- [Bo] R. Bott, Nondegenerate critical manifolds, *Ann. of Math.* *60* (1954), 248-261.
- [BT] R. Bott, L.W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, GTM 82, Springer, 1982.
- [Bg] F. Bourgeois, *A Morse-Bott approach to contact homology*, PhD thesis, Stanford University, 2002.
- [Br] G. Bredon, *Topology and geometry*, GTM 139, Springer, 1993.
- [Bz] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- [Ci] K. Cieliebak, A geometric obstruction to the contact type property, *Math. Z.* *228* (1998), 451-487.
- [CFHW2] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki, Applications of symplectic homology II: Stability of the action spectrum, *Math. Z.* *223* (1996), 27-45.
- [CFH2] K. Cieliebak, A. Floer, H. Hofer, Symplectic homology II, *Math. Z.* *218* (1995), 103-122.
- [Co] C. Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, *CBMS Series 38*, AMS, 1978.
- [CZ] C. Conley, E. Zehnder, Morse-type index theory for flows and periodic solutions for hamiltonian equations, *Comm. Pure Appl. Math.* *37* (1984), 207-253.
- [D] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer, 1972.
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, 1952.
- [EG] Y. Eliashberg, M. Gromov, Convex symplectic manifolds. In *Several complex variables and complex geometry*, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), Proc. Sympos. Pure Math. *52* : 2, AMS, 1991, 135-162.
- [F1] A. Floer, A relative Morse index for the symplectic action, *Comm. Pure Appl. Math.* *41* (1988), 393-407.

-
- [F2] A. Floer, The unregularized gradient flow of the symplectic action, *Comm. Pure Appl. Math.* 41 (1988), 775-813.
- [F3] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, *Comm. Math. Phys.* 120 (1989), 575-611.
- [F4] A. Floer, Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, *J. Diff. Geom.* 30 (1989), 207-221.
- [FH1] A. Floer, H. Hofer, Symplectic homology I, *Math. Z.* 215 (1994), 37-88.
- [FH2] A. Floer, H. Hofer, Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry, *Math. Z.* 212 (1993), 13-38.
- [FHW1] A. Floer, H. Hofer, K. Wysocki, Applications of symplectic homology I, *Math. Z.* 217 (1994), 577-606.
- [FHS] A. Floer, H. Hofer, D. Salamon, Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action, *Duke Math. J.* 80 (1996), 251-292.
- [Fo] R. Forman, Spectral sequences and adiabatic limits, *Comm. Math. Phys.* 168 (1995), 57-116.
- [Fu] K. Fukaya, Floer homology of connected sum of homology 3-spheres, *Topology* 35 (1996), 89-136.
- [Ft] M. Furuta, Morse theory and the Thom-Gysin exact sequence. In *Einstein metrics and Yang-Mills connections*, Lecture Notes Pure & Appl. Math. 145, Marcel Dekker, 1993, 69-77.
- [Ga] P. Gauduchon, Connexions linéaires, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch. In *Holomorphic curves in symplectic geometry*, M. Audin, J. Lafontaine, Eds., Birkhäuser, 1994, 113-162.
- [GLSW] M.J. Gotay, R. Lashof, J. Śniatycki, A. Weinstein, Closed forms on symplectic fibre bundles, *Comment. Math. Helvetici* 58 (1983), 617-621.
- [G] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* 82 (1985), 307-347.
- [Ha] A. Hatcher, *Spectral sequences in Algebraic Topology*, 40 pages disponibles sur <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>.
- [He1] D. Hermann, *Homologie symplectique et épaisseur de Gromov d'un ouvert de type contact restreint*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 1998.
- [He2] D. Hermann, Holomorphic curves and hamiltonian systems in an open set with restricted contact-type boundary, *Duke Math. J.* 103 (2000), 335-374.
- [HV] H. Hofer, C. Viterbo, The Weinstein conjecture in $P \times \mathbb{C}^l$, *Math. Z.* 203 (1990), 469-482.
- [HZ] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, 1994.

-
- [Hu] M. Hutchings, Floer homology of families I, arXiv: math.SG/0308115 (août 2003).
- [Ke] J. Kędra, Communication personnelle, mars 2003.
- [LaMc] F. Lalonde, D. McDuff, Symplectic structures on fiber bundles, *Topology* 42 (2003), 309–347.
- [L1] F. Laudenbach, On the Thom-Smale complex, appendice à J.M. Bismut, W. Zhang, An extension of a theorem by Cheeger and Müller, *Astérisque* 205 (1992), 205–214.
- [L2] F. Laudenbach, Trois constructions en topologie symplectique, *Annales Fac. Sci. Toulouse* 6 (1997), 697–709.
- [McC] J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences*, Cambridge Univ. Press, 2001.
- [McD] D. McDuff, Symplectic manifolds with contact type boundaries, *Invent. Math.* 103 (1991), 651–671.
- [McSa] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to symplectic topology, 2ème édition, Oxford University Press, 1998.
- [Mi1] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, 1963.
- [Mi2] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, 1965.
- [MiSt] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [Mu] M.-P. Muller, Gromov's Schwarz lemma as an estimate of the gradient for holomorphic curves. In *Holomorphic curves in Symplectic Geometry*, M. Audin, J. Lafontaine, Eds., Birkhäuser, 1994.
- [Po] M. Pozniak, Floer homology, Novikov rings and clean intersections. In *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, AMS Transl. 196, AMS, 1999.
- [RS1] J. Robbin, D. Salamon, The Maslov index for paths, *Topology* 32 (1993), 827–844.
- [RS2] J. Robbin, D. Salamon, The spectral flow and the Maslov index, *Bull. London Math. Soc.* 27 (1995), 1–33.
- [S1] D. Salamon, Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets, *Trans. AMS* 291 (1985), 1–41.
- [S2] D. Salamon, Morse theory: the Conley index and Floer homology, *Bull. London Math. Soc.* 22 (1990), 113–140.
- [S3] D. Salamon, Lectures on Floer homology. In *Symplectic Geometry and Topology*, Y. Eliashberg, L. Traynor, Eds., IAS/Park City Math. Series, vol. 7, AMS, 1999, 143–230.
- [SW] D. Salamon, J. Weber, Floer homology and the heat flow, preprint ETH-Zürich (2003), arXiv: math.SG/0304383.
- [Sch1] M. Schwarz, *Morse Homology*, Birkhäuser, 1993.

-
- [Sch2] M. Schwarz, Travail en cours.
- [Se] J.-P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, *Ann. of Math.* 54 (1951), 425-505.
- [Sik] J.-C. Sikorav, Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds. In *Holomorphic curves in Symplectic Geometry*, M. Audin, J. Lafontaine, Eds., Birkhäuser, 1994.
- [Sm1] S. Smale, Morse inequalities for a dynamical system, *Bull. Amer. Math. Soc.* 66 (1960), 43-49.
- [Sm2] S. Smale, On gradient dynamical systems, *Ann. of Math.* 74 (1961), 199-206.
- [Sm3] S. Smale, An infinite dimensional version of Sard's theorem, *Amer. J. Math.* 87 (1965), 861-866.
- [St] N. Steenrod, Homology with local coefficients, *Ann. of Math.* 44 (1943), 610-627.
- [T] F. Takens, Hamiltonian systems: generic properties of closed orbits and local perturbations, *Math. Ann.* 188 (1970), 304-312.
- [Th] R. Thom, Sur une partition en cellules associée à une fonction différentiable, *CRAS* 228 (1949), 973-975.
- [V1] C. Viterbo, A proof of the Weinstein conjecture in \mathbb{R}^{2n} , *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-linéaire* 4 (1987), 337-357.
- [V2] C. Viterbo, Functors and computations in Floer homology with applications, I, *Geom. Funct. Anal.* 9 (1999), 985-1033.
- [V3] C. Viterbo, Functors and computations in Floer homology with applications, II, Université Paris-Sud, prépublication 98-15 (1998).
- [Wi] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, *J. Diff. Geom.* 17 (1982), 661-692.